Julia Meyer
julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Contrôle continu – 4 novembre 2013 (CORRIGÉ)

1. Quelques questions courtes. *(∼15%)*

a) *[12 points]* On considère la fonction

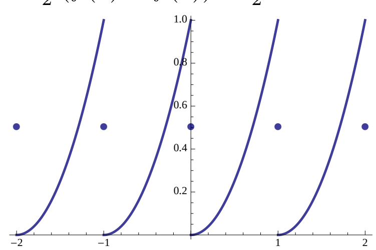
$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2. \end{array}$$

La fonction $f(x)$ peut être développée en série de Fourier ($f_F(x)$), série de sinus ($f_s(x)$) ou série de cosinus ($f_c(x)$) sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0,1]$.

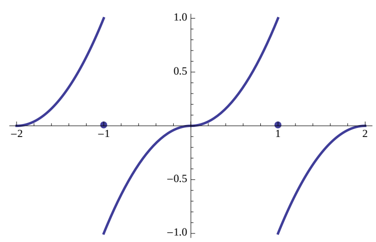
— Donnez les valeurs de ces 3 séries, c'est-à-dire, $f_F(x)$, $f_s(x)$ et $f_c(x)$, en $x = 0$ et en $x = 1$.
— Tracer les 3 fonctions $f_F(x)$, $f_s(x)$ et $f_c(x)$ sur l'intervalle élargi $\mathcal{I}' = [-2,2]$.

<u>Solution</u> *: La fonction obéit aux conditions de Cauchy-Riemann. Donc la valeur de la série en $x = x_0$ est donnée par $\frac{1}{2}\left(f(x_0+0^+) + f(x_0-0^+)\right)$.*

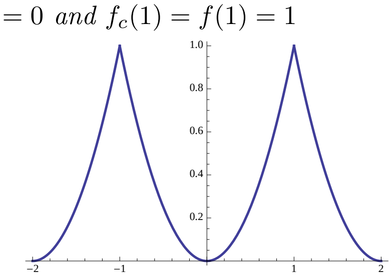
— *série de Fourier : $f_F(0) = f_F(1) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) = \frac{1}{2}$*



— *série de sinus : $f_s(0) = f_s(1) = 0$*



— *série de cosinus : $f_c(0) = f(0) = 0$ and $f_c(1) = f(1) = 1$*



---

b) *[4 points]* L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = 0$$

est une équation aux dérivées partielles. Utiliser les transformées de Fourier pour la réduire *(i)* à une équation différentielle ordinaire et *(ii)* à une équation algébrique.

Solution : Une TF donne une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{aligned} i\omega\tilde{u}(x,\omega) - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{u}(x,\omega) = & \quad 0 \quad \text{avec } \tilde{u}(x,\omega) = \mathrm{TF}_t\left[u(x,t)\right], \\ \text{ou} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(q,t) + Dq^2\tilde{u}(q,t) = & \quad 0 \quad \text{avec } \tilde{u}(q,t) = \mathrm{TF}_x\left[u(x,t)\right]. \end{aligned}$$

Deux TFs donnent une équation algébrique :

$$i\omega\,\tilde{\tilde{u}}(q,\omega) + Dq^2\,\tilde{\tilde{u}}(q,\omega) = 0 \text{ avec } \tilde{\tilde{u}}(q,\omega) = \mathrm{TF}_x\left[\tilde{u}(x,\omega)\right] \text{ ou } \tilde{\tilde{u}}(q,\omega) = \mathrm{TF}_t\left[\tilde{u}(q,t)\right].$$

---

2. Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist. *(~50%)*

L'échantillonnage consiste a enregistrer un signal $f(t)$ seulement pour un nombre discret de points, $f_n = f(n\tau)$. Le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist affirme que nous sommes capable de reconstituer exactement la fonction $f(t)$ à partir des f_n sous certaines conditions. Nous allons démontrer ce théorème.

a) *[4 points]* Le peigne de Dirac est défini par

$$\psi_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - na).$$

Démontrer que la période de $\psi_a(t)$ est a.

Solution : On trouve

$$\psi_a(t+a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + a - na) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - (n-1)a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - na) = \psi(t).$$

Donc $\psi_a(t)$ est périodique avec la période a.

---

b) *[6 points]* Comme $\psi_a(t)$ est de période a, on peut décomposer $\psi_a(t)$ en série de Fourier sur l'intervalle $[-a/2, a/2]$. Trouver les coefficients a_n et b_n. En déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - na) = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi nt/a}.$$

Solution : Comme $\psi_a(t)$ est une fonction paire, $b_n = 0$. Pour les a_n, on obtient

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-na)\,dt = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-a/2}^{a/2}\delta(t-na)\,dt = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi\left(\frac{t}{a}\right)\delta(t-na)\,dt \\ &= \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi\left(\frac{t}{a}+n\right)\delta(t)\,dt = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Pi(n) = \frac{1}{a}, \\ a_n &= \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-na)\cos\left(2\pi n\frac{t}{a}\right)\,dt = \frac{2}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Pi(n)\cos\left(2\pi n^2\right) = \frac{2}{a}. \end{aligned}$$

Donc

$$\psi_a(t) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(2\pi n\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{2i\pi nt/a} + e^{-2i\pi nt/a}\right)\right\} = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi nt/a}.$$

c) *[5 points]* Trouver la TF du peigne de Dirac en utilisant le résultat de b). Démontrer

$$\widetilde{\psi}_a(\omega) = \frac{2\pi}{a}\psi_{2\pi/a}(\omega).$$

Solution : On trouve

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi nt/a} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - 2\pi n/a)t} dt \\ &= \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{a}\right) = \frac{2\pi}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{a}\right) = \frac{2\pi}{a}\psi_{2\pi/a}(\omega).\end{aligned}$$

---

d) *[8 points]* Rappeler ce que vaut $(f * \delta_a)(t)$, le produit de convolution d'une fonction $f(t)$ quelconque avec la distribution de Dirac, $\delta_a(t) = \delta(t-a)$. Soit maintenant la fonction $f(t)$ à support borné : $f(t) = 0$ si $t \notin [-b/2, b/2]$. Représenter graphiquement $(f * \delta_a)(t)$ dans les cas où $a < b$, $a = b$ et $a > b$. En utilisant ces résultats, représenter graphiquement $(f * \psi_a)(t)$ dans les trois cas précédents.

Solution : Le produit de convolution de f et δ_a est donné par

$$(f * \delta_a)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta_a(t-s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(t-s-a)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s+t-a)\delta(s)\, ds = f(t-a).$$

Pour le graphique, on choisit $f(x) = (1-x^2)\Pi(x/2)$. Donc $b = 2$. Voir figures 1 et 2.

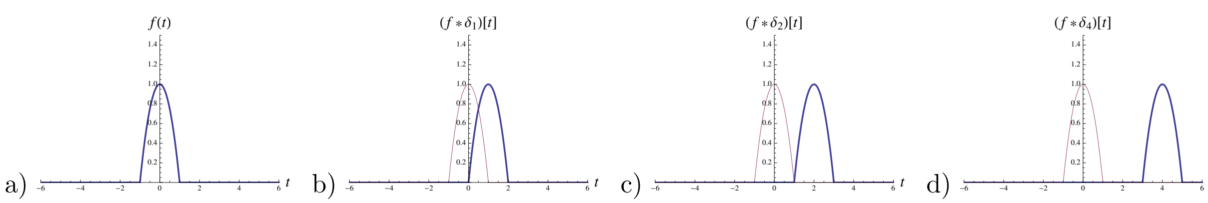


FIGURE 1 – Les quatre figures montrent a) $f(t)$, b) $(f * \delta_1)(t)$ (donc $a < b$), c) $(f * \delta_2)(t)$ (donc $a = b$) et d) $(f * \delta_4)(t)$ (donc $a > b$). Dans les figures b) – d), $f(x)$ est indiqué par une ligne fine pour souligner la différence entre les trois cas.

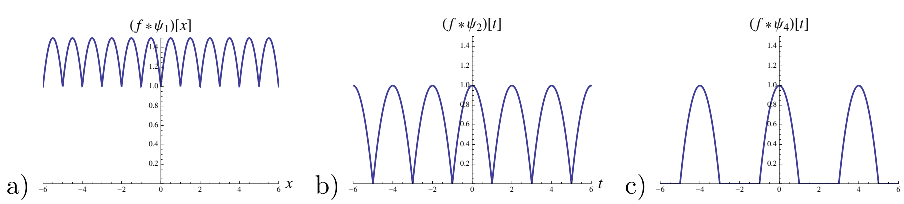


FIGURE 2 – Les trois figures montrent a) $(f * \psi_1)(t)$ (donc $a < b$), b) $(f * \psi_2)(t)$ (donc $a = b$) et d) $(f * \psi_4)(t)$ (donc $a > b$). On voit que dans la figure b), la fonction $f(x)$ est répétée périodiquement avec la période b. Dans la figure a), les répétitions se recouvrent. Dans la figure c), il y a des espaces entre les répétitions.

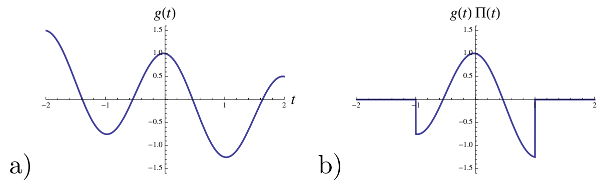


FIGURE 3 – Les deux figures montrent a) $g(t)$ et b) $g(t)\Pi(t/2)$.

e) *[3 points]* Soit $g(t)$ une fonction quelconque. Montrer graphiquement les fonctions $g(t)$ et $g(t) \cdot \Pi(t/a)$, où Π représente la fonction porte, $\Pi(x) = 1$ pour $-1/2 < x < 1/2$ et $\Pi(x) = 0$ sinon.

<u>Solution</u> : Pour le graphique, on choisit $g(t) = \cos(\pi x) - x/4$ et $a = 2$. Voir figure 3.

---

f) *[4 points]* Soit maintenant la fonction à support borné $\tilde{f}(\omega)$, nulle en dehors de l'intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$. En utilisant les résultats précédents, argumenter pourquoi

$$\tilde{f}(\omega) = (\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega) \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right). \tag{1}$$

Aidez vous d'un graphique.

[Help : Ce n'est pas important que l'argument de la fonction soit ω au lieu de t. En effet, les considérations sont les mêmes dans l'espace de Fourier que celles qu'on a utilisées dans l'espace réel pour les questions précédentes.]

<u>Solution</u> : Le produit de convolution $\tilde{g}(\omega) = (\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega)$ fait que la fonction $\tilde{f}(\omega)$ est répétée périodiquement avec période $2\omega_0$. Le produit $\tilde{g}(\omega) \cdot \Pi(\omega/2\omega_0)$ fait qu'on retient seulement la copie originale et pas les répétitions. Voir figure 4. Donc

$$\tilde{f}(\omega) = (\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega) \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right).$$

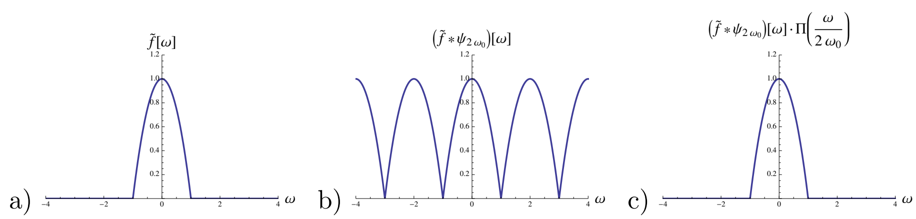


FIGURE 4 – Les trois figures montrent a) $\tilde{f}(\omega)$, b) $(\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega)$ et c) $(\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega) \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$. On voit que les fonctions dans les figures a) et c) sont les mêmes.

---

g) *[6 points]* Trouver la TF inverse de la fonction porte. Démontrer

$$\mathrm{TF}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)\right] = \frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\omega_0 t).$$

Ici $\mathrm{sinc}(x) = \sin x/x$.

Solution : *On trouve*

$$\begin{aligned}\mathrm{TF}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{it}e^{i\omega t}\right]_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{1}{2\pi i t}\left(e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}\right)\\ &= \frac{1}{\pi t}\sin(\omega_0 t) = \frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\omega_0 t).\end{aligned}$$

---

h) *[4 points]* Rappeler la TF inverse de $\tilde{a}(\omega)\cdot\tilde{b}(\omega)$. Rappeler la TF inverse de $\left(\tilde{c}*\tilde{d}\right)(\omega)$.

Solution : *On trouve*

$$\begin{aligned}\mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{a}(\omega)\cdot\tilde{b}(\omega)\right] &= (a*b)(t),\\ \mathrm{TF}^{-1}\left[\left(\tilde{c}*\tilde{d}\right)(\omega)\right] &= 2\pi\, c(t)\cdot d(t).\end{aligned}$$

---

j) *[5 points]* Démontrer

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\frac{\pi}{\omega_0})\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t-n\frac{\pi}{\omega_0}))$$

à partir de l'expression (1) pour $\tilde{f}(\omega)$ en f). Cette expression nous donne une représentation exacte de la fonction $f(t)$ à partir des $f_n = f(n\tau)$ avec $\tau = \pi/\omega_0$.

Rappel : Selon b), $\mathrm{TF}^{-1}[\psi_a(\omega)] = (1/a)\psi_{2\pi/a}(t)$.

Solution : *Selon f), la fonction* $\tilde{f}(\omega)$ *peut s'écrire sous la forme* $\tilde{a}(\omega)\cdot\tilde{b}(\omega)$ *avec* $\tilde{a}(\omega) = (\tilde{f}*\psi_{2\omega_0})(\omega)$ *et* $\tilde{b}(\omega) = \Pi\left(\omega/2\omega_0\right)$. *Donc, selon h),*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(s)b(t-s)\,ds.$$

On utilise alors que, selon h),

$$a(s) = \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{a}(\omega)] = \mathrm{TF}^{-1}\left[(\tilde{f}*\psi_{2\omega_0})(\omega)\right] = 2\pi f(s)\cdot\mathrm{TF}^{-1}[\psi_{2\omega_0}(\omega)].$$

Avec b), on obtient

$$a(s) = \frac{\pi}{\omega_0}f(s)\cdot\psi_{\pi/\omega_0}(s).$$

Selon g), $b(t-s) = (\omega_0/\pi)\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t-s))$. *Donc,*

$$\begin{aligned}f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\psi_{\pi/\omega_0}(s)\cdot\frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t-s))\,ds\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(s-n\frac{\pi}{\omega_0})\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t-s))\,ds\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\pi}{\omega_0}\right)\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t-n\frac{\pi}{\omega_0})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t-n\tau)).\end{aligned}$$

---

i) *[3 points]* On suppose maintenant que

$$f(t) = \frac{1}{t}\left[A\sin(\Omega t) + B\sin\left(\frac{3}{2}\Omega t\right)\right]$$

avec $A, B, \Omega \in \mathbb{R}_+$. On admet que la transformée de Fourier est donnée par

$$\tilde{f}(\omega) = \pi A\,\Pi\left(\frac{\omega}{2\Omega}\right) + \pi B\,\Pi\left(\frac{\omega}{3\Omega}\right).$$

Quel est l'intervalle maximal entre des points discrets auxquels il faudrait enregistrer le signal pour le reconstituer exactement ?

Solution : La transformée de Fourier de $f(t)$ est non-nulle dans l'intevalle $[-\frac{3}{2}\Omega, \frac{3}{2}\Omega]$. Donc il suffit d'enregistrer le signal à des intervalles $\delta t = \pi/\left(\frac{3}{2}\Omega\right)$.

---

3. Analyse complexe. *(∼35%)*

Nous allons calculer l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}dx.$$

a) *[4 points]* Trouver le domaine sur lequel la fonction $f(z) = z/(1+z^4)$ est analytique/holomorphe. (Utiliser les conditions de Cauchy-Riemann.)

Solution : La fonction f est définie sur $\mathbb{C}\backslash\{z|1+z^4=0\}$. Une fonction est analytique/holomorphe, si elle obéit aux conditions de Cauchy-Riemann ($\partial_x f = -i\partial_y f$) et les dérivées partielles sont continues. On obtient

$$\begin{aligned}
\partial_x f &= (\partial_x z)\,\partial_z f = \partial_z f = \frac{1+z^4-4z^4}{(1+z^4)^2} = \frac{1-3z^4}{(1+z^4)^2}, \\
\partial_y f &= (\partial_y z)\,\partial_z f = i\partial_z f = i\frac{1+z^4-4z^4}{(1+z^4)^2} = i\frac{1-3z^4}{(1+z^4)^2}.
\end{aligned}$$

Donc $\partial_x f = -i\partial_y f$ et les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{C}\backslash\{z|1+z^4=0\}$. C'est-à-dire la fonction est analytique/holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{z|1+z^4=0\}$.

---

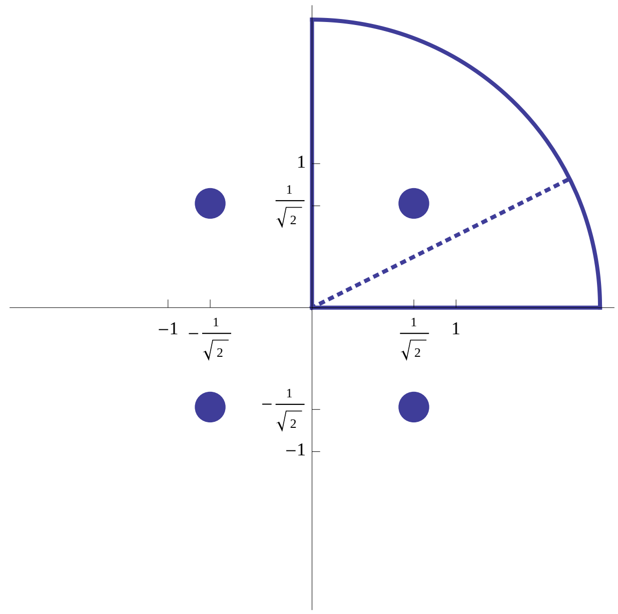
b) *[5 points]* Déterminer la position et la nature des singularités de $f(z)$. Indiquer les pôles sur la figure.

Solution : La fonction f possède des singularités pour $1+z^4=0$. Donc

$$z^4 = \left(re^{i\theta}\right)^4 = r^4e^{4i\theta} = -1 = e^{i(2n+1)\pi}$$

avec $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$. On trouve $r = 1$ et $\theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$. La fonction $f(z)$ possède 4 pôles simples à

$$z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \qquad z_1 = e^{i3\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$
$$z_2 = e^{i5\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \qquad \text{et} \qquad z_3 = e^{i7\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$



---

c) *[4 points]* Trouver les valeurs de φ tel que $f(re^{i\varphi}) = c_\varphi f(r)$ avec $c_\varphi \in \mathbb{C}$ pour tous $r \in [0, \infty[$. Déterminer les constantes c_φ correspondantes.

<u>Solution</u> : On trouve

$$f\left(re^{i\varphi}\right) = \frac{re^{i\varphi}}{1 + r^4 e^{4i\varphi}}.$$

Donc

$$f\left(re^{i\varphi}\right) = e^{i\varphi} f(r)$$

pour $\exp[4i\varphi] = 1$ *ou* $4\varphi = 2n\pi$. *On obtient*

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_2 = \pi \qquad \text{et} \qquad \varphi_3 = \frac{3\pi}{2},$$

avec $c_{\varphi_0} = 1$, $c_{\varphi_0} = i$, $c_{\varphi_2} = -1$ *et* $c_{\varphi_3} = -i$.

---

d) *[6 points]* Exprimer l'intégrale $\mathcal{I}$ en fonction de l'intégrale $\mathcal{I}'$ de $f(z)$ le long du contour fermé $\mathcal{C}$, indiqué dans la figure. Justifier.

<u>Solution</u> : Le contour consiste de 3 parties

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \int_{0\to\infty} f(z)\, dz + \int_{\infty\to e^{i\pi/2}\infty} f(z)\, dz + \int_{e^{i\pi/2}\infty\to 0} f(z)\, dz.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\int_{0\to\infty} f(z)\, dz &= \mathcal{I}, \\
\int_{\infty\to e^{i\pi/2}\infty} f(z)\, dz &= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi/2} d\left(Re^{i\phi}\right) \frac{Re^{i\phi}}{1 + R^4 e^{4i\phi}} = 0, \\
\int_{e^{i\pi/2}\infty\to 0} f(z)\, dz &= -\int_0^{\infty} d\left(re^{i\pi/2}\right) e^{i\pi/2} f(r) = \mathcal{I}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I} + \mathcal{I} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{I} = \frac{1}{2}\mathcal{I}'.$$

---

e) *[5 points]* Déterminer

$$\mathcal{I}' = \oint_{\mathcal{C}} \frac{z}{1+z^4} dz$$

par le calcul des résidus.

Help :

$$\cos\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4} = -\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

<u>Solution</u> : Seulement le pôle $z_0 = e^{i\pi/4}$ est à l'intérieur du contour $\mathcal{C}$. Donc

$$\mathcal{I}' = 2\pi i \, \mathrm{Res}[f; z_0].$$

Comme il s'agit d'un pôle du 1^er ordre, le résidu est donné par

$$\mathrm{Res}[f; z_0] = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)] = \frac{1}{4z_0^2}.$$

On obtient

$$\mathcal{I}' = 2\pi i \frac{1}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

---

f) *[1 point]* Obtenir le résultat pour l'intégrale $\mathcal{I}$.

<u>Solution</u> : Avec $\mathcal{I} = \mathcal{I}'/2$, on obtient $\mathcal{I} = \pi/4$.

---

g) *[2 points]* Donner le rayon de convergence de la série de Laurent de $f(z)$ autour de la singularité enfermée par le contour $\mathcal{C}$.

<u>Solution</u> : Le rayon de convergence d est donné par la distance la plus courte de z_0 aux autres singularités. Donc $d = |z_1 - z_0| = |z_3 - z_0| = \sqrt{2}$.

---

h) *[2 points]* Indiquer un autre contour fermé $\mathcal{C}'$ sur la figure qui permettrait aussi de calculer $\mathcal{I}$.

<u>Solution</u> :