Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Contrôle continu – 4 novembre 2013

Modalités : Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :

— Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.

— Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.

— La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.

Formules utiles :

Séries de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x) \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\, dx \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\, dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2i\pi nx/L} \qquad c_n = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\, e^{2i\pi nx/L} dx$$

Séries de sinus et cosinus :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n \frac{x}{L}) \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin(\pi n \frac{x}{L})\, dx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n \frac{x}{L}) \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos(\pi n \frac{x}{L})\, dx$$

Transformées de Fourier :

$$\mathrm{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iqx} dx \qquad \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{f}(q)] = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q)\, e^{iqx} dq$$

Convolutions et corrélations :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\; f(s) g(x-s) \qquad C_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\; f^*(s) g(x+s)$$

Séries de Taylor :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Séries de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_{-1} = \mathrm{Res}(f; z_0)$$

1. Quelques questions courtes. *(∼15%)*

a) On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2. \end{array}$$

La fonction $f(x)$ peut être développée en série de Fourier ($f_F(x)$), série de sinus ($f_s(x)$) ou série de cosinus ($f_c(x)$) sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0,1]$.

— Donnez les valeurs de ces 3 séries, c'est-à-dire, $f_F(x)$, $f_s(x)$ et $f_c(x)$, en $x = 0$ et en $x = 1$.

— Tracer les 3 fonctions $f_F(x)$, $f_s(x)$ et $f_c(x)$ sur l'intervalle élargi $\mathcal{I}' = [-2,2]$.

b) L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = 0$$

est une équation aux dérivées partielles. Utiliser les transformées de Fourier pour la réduire *(i)* à une équation différentielle ordinaire et *(ii)* à une équation algébrique.

---

2. Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist. *(∼50%)*

L'échantillonnage consiste a enregistrer un signal $f(t)$ seulement pour un nombre discret de points, $f_n = f(n\tau)$. Le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist affirme que nous sommes capable de reconstituer exactement la fonction $f(t)$ à partir des f_n sous certaines conditions. Nous allons démontrer ce théorème.

a) Le peigne de Dirac est défini par

$$\psi_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - na).$$

Démontrer que la période de $\psi_a(t)$ est a.

b) Comme $\psi_a(t)$ est de période a, on peut décomposer $\psi_a(t)$ en série de Fourier sur l'intervalle $[-a/2, a/2]$. Trouver les coefficients a_n et b_n. En déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - na) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi nt/a}.$$

c) Trouver la TF du peigne de Dirac en utilisant le résultat de b). Démontrer

$$\widetilde{\psi}_a(\omega) = \frac{2\pi}{a} \psi_{2\pi/a}(\omega).$$

d) Rappeler ce que vaut $(f * \delta_a)(t)$, le produit de convolution d'une fonction $f(t)$ quelconque avec la distribution de Dirac, $\delta_a(t) = \delta(t-a)$. Soit maintenant la fonction $f(t)$ à support borné : $f(t) = 0$ si $t \notin [-b/2, b/2]$. Représenter graphiquement $(f * \delta_a)(t)$ dans les cas où $a < b$, $a = b$ et $a > b$. En utilisant ces résultats, représenter graphiquement $(f * \psi_a)(t)$ dans les trois cas précédents.

e) Soit $g(t)$ une fonction quelconque. Montrer graphiquement les fonctions $g(t)$ et $g(t) \cdot \Pi(t/a)$, où Π représente la fonction porte, $\Pi(x) = 1$ pour $-1/2 < x < 1/2$ et $\Pi(x) = 0$ sinon.

f) Soit maintenant la fonction à support borné $\tilde{f}(\omega)$, nulle en dehors de l'intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$. En utilisant les résultats précédents, argumenter pourquoi

$$\tilde{f}(\omega) = (\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega) \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right). \tag{1}$$

Aidez vous d'un graphique.

[Help : Ce n'est pas important que l'argument de la fonction soit ω au lieu de t. En effet, les considérations sont les mêmes dans l'espace de Fourier que celles qu'on a utilisées dans l'espace réel pour les questions précédentes.]

g) Trouver la TF inverse de la fonction porte. Démontrer

$$\mathrm{TF}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)\right] = \frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\omega_0 t).$$

Ici $\mathrm{sinc}(x) = \sin x/x$.

h) Rappeler la TF inverse de $\tilde{a}(\omega) \cdot \tilde{b}(\omega)$. Rappeler la TF inverse de $\left(\tilde{c} * \tilde{d}\right)(\omega)$.

j) Démontrer

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\frac{\pi}{\omega_0})\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t - n\frac{\pi}{\omega_0}))$$

à partir de l'expression (1) pour $\tilde{f}(\omega)$ en f). Cette expression nous donne une représentation exacte de la fonction $f(t)$ à partir des $f_n = f(n\tau)$ avec $\tau = \pi/\omega_0$.

Rappel : Selon b), $\mathrm{TF}^{-1}[\psi_a(\omega)] = (1/a)\psi_{2\pi/a}(t)$.

i) On suppose maintenant que

$$f(t) = \frac{1}{t}\left[A\sin(\Omega t) + B\sin\left(\frac{3}{2}\Omega t\right)\right]$$

avec $A, B, \Omega \in \mathbb{R}_+$. On admet que la transformée de Fourier est donnée par

$$\tilde{f}(\omega) = \pi A\,\Pi\left(\frac{\omega}{2\Omega}\right) + \pi B\,\Pi\left(\frac{\omega}{3\Omega}\right).$$

Quel est l'intervalle maximal entre des points discrets auxquels il faudrait enregistrer le signal pour le reconstituer exactement ?

---

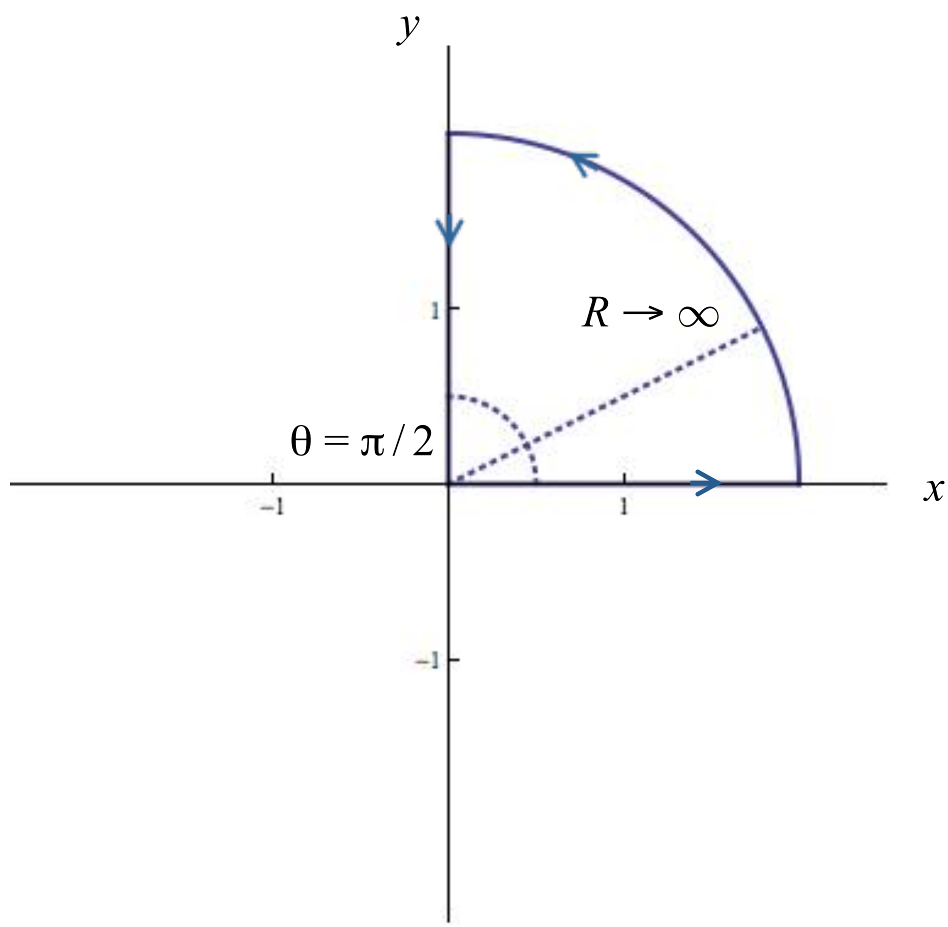
3. Analyse complexe. *(∼35%)*

Nous allons calculer l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx.$$

a) Trouver le domaine sur lequel la fonction $f(z) = z/(1+z^4)$ est analytique/holomorphe. (Utiliser les conditions de Cauchy-Riemann.)

b) Déterminer la position et la nature des singularités de $f(z)$. Indiquer les pôles sur la figure.



c) Trouver les valeurs de φ tel que $f(re^{i\varphi}) = c_\varphi f(r)$ avec $c_\varphi \in \mathbb{C}$ pour tous $r \in [0, \infty[$. Déterminer les constantes c_φ correspondantes.

d) Exprimer l'intégrale $\mathcal{I}$ en fonction de l'intégrale $\mathcal{I}'$ de $f(z)$ le long du contour fermé $\mathcal{C}$, indiqué dans la figure. Justifier.

e) Déterminer

$$\mathcal{I}' = \oint_{\mathcal{C}} \frac{z}{1+z^4} dz$$

par le calcul des résidus.

Help :

$$\cos\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4} = -\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{7\pi}{4} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

f) Obtenir le résultat pour l'intégrale $\mathcal{I}$.

g) Donner le rayon de convergence de la série de Laurent de $f(z)$ autour de la singularité enfermée par le contour $\mathcal{C}$.

h) Indiquer un autre contour fermé $\mathcal{C}'$ sur la figure qui permettrait aussi de calculer $\mathcal{I}$.