Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
CORRIGÉ : Examen final – 10 janvier 2013

1. Transformées de Fourier et Analyse Complexe. *($\sum$=20 points)*

Nous souhaitons résoudre l'équation

$$\dot{x} + \rho x = f(t)$$

avec $\rho \in \mathbb{R}_+$.

a) *[2 points]* Trouver une équation pour déterminer la TF de $x(t)$.

<u>Solution</u> : On prend la TF de l'équation $\dot{x} + \rho x = f(t)$ pour obtenir

$$i\omega\tilde{x}(\omega) + \rho\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega + \rho}.$$

---

b) *[2 points]* Obtenir $\tilde{x}_\delta(\omega)$ pour le cas $f(t) = \delta(t)$.

<u>Solution</u> : Pour $f(t) = \delta(t)$, on obtient $\tilde{f}(\omega) = 1$. Donc

$$\tilde{x}_\delta(\omega) = \frac{1}{i\omega + \rho}.$$

---

c) *[9 points]* Utiliser des méthodes de l'analyse complexe pour prendre la TF inverse de $\tilde{x}_\delta(\omega)$ pour le cas $f(t) = \delta(t)$. Justifier toutes les étapes du calcul.

<u>Solution</u> : La TF inverse est donnée par

$$x_\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\frac{1}{i\omega + \rho} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{itz}\frac{1}{z - i\rho}.$$

Donc il s'agit de calculer une intégrale de la forme $I = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{itz} g(z)$ avec $g(z) \to 0$ pour $|z| \to \infty$. En utilisant le lemme de Jordan, on peut fermer le contour par un demi-cercle de rayon $R \to \infty$. Pour $t > 0$, il faut choisir un demi-cercle dans le plan complexe supérieur ($\Im[z] > 0$) tel que $\Re[itz] > 0$ et $e^{itz} \to 0$ pour $|z| \to \infty$ (contour $\mathcal{C}_+$). Pour $t < 0$, il faut choisir un demi-cercle dans le plan complexe inférieur ($\Im[z] < 0$) tel que $\Re[itz] > 0$ et $e^{itz} \to 0$ pour $|z| \to \infty$ (contour $\mathcal{C}_-$).

On obtient

$$x_\delta(t) = \frac{1}{2\pi i}\left\{H(t)\oint_{\mathcal{C}_+} dz\, e^{itz}\frac{1}{z - i\rho} + H(-t)\oint_{\mathcal{C}_-} dz\, e^{itz}\frac{1}{z - i\rho}\right\}.$$

La fonction à intégrer est analytique en $\mathbb{C}\backslash\{i\rho\}$. En $z_0 = i\rho$, elle possède un pôle simple. Donc on peut utiliser le théorème des résidus pour obtenir

$$
\begin{aligned}
x_\delta(t) &= \frac{1}{2\pi i}\left\{H(t)2\pi i \sum_{\Im[z_0]>0} \operatorname{Res}\left(e^{itz}\frac{1}{z-i\rho}; z_0\right) + H(-t)2\pi i \sum_{\Im[z_0]<0} \operatorname{Res}\left(e^{itz}\frac{1}{z-i\rho}; z_0\right)\right\} \\
&= H(t)\operatorname{Res}\left(e^{itz}\frac{1}{z-i\rho}; i\rho\right).
\end{aligned}
$$

Le résidu est donné par

$$\operatorname{Res}\left(e^{itz}\frac{1}{z-i\rho}; i\rho\right) = \lim_{z\to i\rho}\left[(z-i\rho)e^{itz}\frac{1}{z-i\rho}\right] = e^{-\rho t}.$$

Donc $x_\delta(t) = H(t)e^{-\rho t}$.

---

d) *[4 points]* Démontrer que dans le cas général la solution peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\; f(s)x_\delta(t-s).$$

<u>Solution</u> : Dans le cas général, on trouve

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega+\rho} = \tilde{f}(\omega)\cdot\tilde{x}_\delta(\omega).$$

Donc

$$x(t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{f}(\omega)\cdot\tilde{x}_\delta(\omega)\right] = (f * x_\delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\; f(s)x_\delta(t-s).$$

---

e) *[3 points]* Obtenir $x(t)$ pour $f(t) = H(t)e^{-\nu t}$, où $\nu \in \mathbb{R}_+$ et $\nu \neq \rho$. Ici $H(t)$ est la fonction Heaviside.

Rappel : $H(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ sinon.

<u>Solution</u> : On trouve

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} ds\; H(s)e^{-\nu s}H(t-s)e^{-\rho(t-s)} = H(t)e^{-\rho t}\int_0^t ds\; e^{(\rho-\nu)s} \\
&= H(t)e^{-\rho t}\left[\frac{1}{\rho-\nu}e^{(\rho-\nu)s}\right]_0^t = H(t)\frac{1}{\rho-\nu}\left(e^{-\nu t} - e^{-\rho t}\right).
\end{aligned}
$$

---

2. Stabilité de Lasers : Calcul des Perturbations. *($\sum$=17 points)*

La dynamique d'un laser est donnée par l'intensité du faisceau émis $I(t)$ et une quantité qu'on appelle l'inversion de population $W(t)$. Ces deux quantités sont reliées par les équations différentielles

$$
\begin{aligned}
\frac{dI(t)}{dt} &= I(t)W(t), \\
\frac{dW(t)}{dt} &= 1 - r_1W(t) - [1 + r_2W(t)]\,I(t),
\end{aligned}
$$

où les paramètres $r_1, r_2 > 0$ sont des constantes physiques de l'instrument.

a) *[3 points]* Trouver les deux points fixes (I_0, W_0) de ce système.

Solution : Le points fixes correspondent à $\dot{I} = \dot{W} = 0$. La première équation impose $IW = 0$. Donc $I_0 = 0$ ou $W_0 = 0$. Pour $I_0 = 0$, la deuxième équation devient $1 - r_1 W = 0$, c'est-à-dire $W_0 = r_1^{-1}$. Pour $W_0 = 0$, la deuxième équation devient $1 - I = 0$, c'est-à-dire $I_0 = 1$. Les deux points fixes sont donc

$$P_1 = (0, r_1^{-1}) \qquad \textit{et} \qquad P_2 = (1, 0).$$

Pour étudier la stabilité linéaire de ces points fixes, on pose $I(t) = I_0 + \epsilon I_1(t)$ et $W(t) = W_0 + \epsilon W_1(t)$. Par la suite, on obtient une équation différentielle de la forme

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I_1(t) \\ W_1(t) \end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} I_1(t) \\ W_1(t) \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{M}$ est une matrice.

b) *[6 points]* Etudier la stabilité linéaire autour du point fixe $(I_0 = 0, W_0 = 1/r_1)$. Donner les valeurs propres de la matrice $\mathbf{M}$. Est-ce que ce point fixe est stable ?

Solution : On obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I_1 &= I_1 W_0 + I_0 W_1 = \frac{1}{r_1} I_1, \\ \frac{d}{dt}W_1 &= -r_1 W_1 - (1 + r_2 W_0) I_1 - r_2 W_1 I_0 = -r_1 W_1 - \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) I_1. \end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ -\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) & -r_1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont données par

$$\det\left(\mathbf{M}_1 - \lambda \mathbb{1}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{1}{r_1} - \lambda\right)(-r_1 - \lambda) = 0.$$

Donc $\lambda_+ = 1/r_1$ et $\lambda_- = -r_1$. Comme une des valeurs propres est positive, le point fixe est instable.

---

c) *[6 points]* Etudier la stabilité linéaire autour du point $(I_0 = 1, W_0 = 0)$. Donner les valeurs propres de la matrice $\mathbf{M}$. Est-ce que ce point fixe est stable ?

Solution : On obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I_1 &= I_1 W_0 + I_0 W_1 = W_1, \\ \frac{d}{dt}W_1 &= -r_1 W_1 - (1 + r_2 W_0) I_1 - r_2 W_1 I_0 = -r_1 W_1 - I_1 - r_2 W_1. \end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -(r_1 + r_2) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont données par

$$\det\left(\mathbf{M}_2 - \lambda \mathbb{1}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\lambda\left[-\left(r_1 + r_2\right) - \lambda\right] + 1 = 0.$$

Donc

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left\{-(r_1 + r_2) \pm \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4}\right\}.$$

Comme la partie des 2 valeurs propres $\lambda_\pm$ est négative, le point fixe est stable.

---

d) *[2 points]* Discuter, pour le point $(I_0 = 1, W_0 = 0)$, les deux cas $r_1 + r_2 > 2$ et $r_1 + r_2 < 2$.

Solution : Pour $r_1 + r_2 > 2$, les valeurs propres $\lambda_\pm$ sont réelles. La solution s'approche exponentiellement du point fixe. Pour $r_1 + r_2 < 2$, les valeurs propres $\lambda_\pm$ ont une partie imaginaire finie. La solution oscille en s'approchant exponentiellement du point fixe.

---

3. Opérateurs Linéaires dans un Espace à 3 Dimensions. *($\sum$=21 points)*

L'espace des états $\mathcal{E}$ d'un certain système est à $N = 3$ dimensions. Soit $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ une base orthonormée. Pour un état $\mathbf{u}$ arbitraire, on écrit

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} + u_3\mathbf{e_3} \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Soit A un opérateur linéaire qui dans cette base est décrit par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

a) *[5 points]* Trouver l'opérateur adjoint $A^\dagger$.

Rappel : Le produit scalaire est défini par $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{N} u_i^* v_i$.
L'opérateur adjoint obéit à l'équation $(A^\dagger\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A\mathbf{v})$.

Solution : On trouve

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e_i}, A\mathbf{e_j}) &= \left(\mathbf{e_i}, \sum_{k=1}^{3} a_{kj}\mathbf{e_k}\right) = \sum_{k=1}^{3} a_{kj}\left(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_k}\right) = \sum_{k=1}^{3} a_{kj}\delta_{i,k} = a_{ij}, \\
(A^\dagger\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}) &= \left(\sum_{k=1}^{3} (A^\dagger)_{ki}\mathbf{e_k}, \mathbf{e_j}\right) = \sum_{k=1}^{3} (A^\dagger)^*_{ki}\left(\mathbf{e_k}, \mathbf{e_j}\right) = \sum_{k=1}^{3} (A^\dagger)^*_{ki}\delta_{k,j} = (A^\dagger)^*_{ji}.
\end{aligned}$$

Avec $(\mathbf{e_i}, A\mathbf{e_j}) = (A^\dagger\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j})$, on obtient donc $a_{ij} = (A^\dagger)^*_{ji}$ ou $(A^\dagger)_{ji} = a^*_{ij}$, c'est-à-dire

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{21} & a^*_{31} \\ a^*_{12} & a^*_{22} & a^*_{32} \\ a^*_{13} & a^*_{23} & a^*_{33} \end{pmatrix}.$$

On définit maintenant les opérateurs linéaires

$$H = \omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\omega_0 > 0$ et b sont des constantes réelles.

b) *[2 points]* Est-ce que H et B sont des opérateurs hermitiens ?

<u>Solution</u> : On trouve

$$H^\dagger = \omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = H \qquad et \qquad B^\dagger = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Donc H et B sont hermitiens.

---

c) *[3 points]* Démontrer que H et B commutent.

<u>Solution</u> : On trouve

$$HB = \omega_0 b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad et \qquad BH = \omega_0 b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, $[H, B] = HB - BH = 0$; les opérateurs H et B commuttent.

---

d) *[4 points]* Trouver les valeurs propres de H et B.

<u>Solution</u> : Pour obtenir les valeurs propres de H, on cherche les solutions de l'équation

$$\det (H - \lambda \mathbb{1}) = (\omega_0 - \lambda)(-\omega_0 - \lambda)^2 = 0.$$

Donc $\lambda_1 = \omega_0$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = -\omega_0$.

Pour obtenir les valeurs propres de B, on cherche les solutions de l'équation

$$\det (B - \mu \mathbb{1}) = (b - \mu)(\mu^2 - b^2) = 0.$$

Donc $\mu_1 = \mu_2 = b$ et $\mu_3 = -b$.

---

e) *[4 points]* Donner une base orthonormée de vecteurs propres de B.

<u>Solution</u> : Le vecteur $\mathbf{v_1} = (1,0,0)^T$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\mu_1 = b$. On cherche les autres vecteurs propres sous la forme $\mathbf{v_{2/3}} = (0, \cos\theta_{2/3}, \sin\theta_{2/3})^T$. On trouve

$$b\sin\theta_{2/3} = \mu_{2/3}\cos\theta_{2/3} \qquad \textit{et} \qquad b\cos\theta_{2/3} = \mu_{2/3}\sin\theta_{2/3}.$$

Donc $\tan\theta_2 = 1$ et $\tan\theta_3 = -1$ ou $\theta_2 = \pi/4$ et $\theta_3 = -\pi_4$, c'est-à-dire

$$\mathbf{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

---

f) *[3 points]* Est-ce que cette base est aussi une base orthonormée de vecteurs propres de H ?

<u>Solution</u> : Comme H et B commuttent, on peut trouver une base propre commune. On vérifie

$$H\mathbf{v}_1 = \omega_0\mathbf{v_1}, \qquad H\mathbf{v}_2 = -\omega_0\mathbf{v_2} \qquad \textit{et} \qquad H\mathbf{v}_3 = -\omega_0\mathbf{v_3}.$$

---

4. Oscillateur Anharmonique : Opérateurs Linéaires et Calcul des Perturbations.

($\sum$=36 points)

L'oscillateur anharmonique est décrit par l'opérateur linéaire (Hamiltonien) $H = H_0 + H_{\rm an}$ avec

$$H_0 = -D^2 + X^2 \qquad \text{et} \qquad H_{\rm an} = \epsilon X^4.$$

Ici $D[f(x)] = f'(x)$ et $X[f(x)] = xf(x)$. En outre, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$.

a) *[4 points]* Nous introduisons l'opérateur linéaire $A = D + X$ et son adjoint $A^\dagger = -D + X$. Ecrire H en fonction de A et $A^\dagger$.

<u>Solution</u> : Avec $D = (A - A^\dagger)/2$ et $X = (A + A^\dagger)/2$, on trouve

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{1}{4}(A - A^\dagger)^2 + \frac{1}{4}(A + A^\dagger)^2 = \frac{1}{4}\left\{-A^2 + AA^\dagger + A^\dagger A - (A^\dagger)^2 + A^2 + AA^\dagger + A^\dagger A + (A^\dagger)^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{AA^\dagger + A^\dagger A\right\}, \\ H_{\rm an} &= \frac{1}{16}(A + A^\dagger)^4. \end{aligned}$$

---

b) *[2 points]* Nous définissons l'opérateur linéaire

$$N = \frac{1}{2}A^\dagger A.$$

Est-ce que N est hermitien ?

Solution : On trouve

$$N^\dagger = \frac{1}{2}\left(A^\dagger A\right)^\dagger = \frac{1}{2}A^\dagger (A^\dagger)^\dagger = \frac{1}{2}A^\dagger A = N,$$

c'est-à-dire N est hermitien.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à l'oscillateur harmonique, c'est-à-dire, on pose $\epsilon = 0$ et considère H_0 seulement.

c) *[3 points]* Exprimer H_0 en fonction de N. Est-ce que H_0 est hermitien ?

Rappel : $[A, A^\dagger] = 2$.

Solution : On obtient

$$H_0 = \frac{1}{2}\left\{AA^\dagger + A^\dagger A\right\} = A^\dagger A + 1 = 2N + 1.$$

Comme N est hermitien, H_0 est hermitien aussi.

---

d) *[3 points]* Soit $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base propre orthonormée de N avec $N[\phi_n] = n\phi_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donner les vecteurs et valeurs propres de l'Hamiltonien H_0.

Solution : On obtient

$$H_0[\phi_n] = (2N+1)[\phi_n] = 2N[\phi_n] + \phi_n = (2n+1)\phi_n.$$

Donc $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base propre orthonormée de H_0 avec les valeurs propres $E_n^{(0)} = 2n+1$ associées.

---

e) *[4 points]* Calculer les commutateurs $[N, A]$ et $[N, A^\dagger]$.

Solution : On trouve

$$\begin{aligned}
[N, A] &= \frac{1}{2}[A^\dagger A, A] = \frac{1}{2}\left(A^\dagger A^2 - AA^\dagger A\right) = \frac{1}{2}[A^\dagger, A]A = -A, \\
[N, A^\dagger] &= \frac{1}{2}[A^\dagger A, A^\dagger] = \frac{1}{2}\left(A^\dagger AA^\dagger - (A^\dagger)^2 A\right) = \frac{1}{2}A^\dagger [A, A^\dagger] = A^\dagger.
\end{aligned}$$

---

f) *[6 points]* Démontrer que $A\phi_n$ et $A^\dagger\phi_n$ sont des vecteurs propres de N et déterminer les valeurs propres associées. Démontrer ainsi $A\phi_n = \alpha_n\phi_{n-1}$ et $A^\dagger\phi_n = \beta_n\phi_{n+1}$ avec $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ et déterminer α_n et β_n.

Rappel : Les vecteurs propres sont orthonormés, $(\phi_n, \phi_m) = \delta_{n,m}$.

Solution : On trouve

$$\begin{aligned}
NA\phi_n &= ([N,A]+AN)\,\phi_n = (-A+AN)\,\phi_n = A\,(-1+n)\,\phi_n = (n-1)\,A\phi_n,\\
NA^\dagger\phi_n &= \left([N,A^\dagger]+A^\dagger N\right)\phi_n = \left(A^\dagger + A^\dagger N\right)\phi_n = A^\dagger\,(1+n)\,\phi_n = (n+1)\,A^\dagger\phi_n.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire,

- *$A\phi_n$ est vecteur propre avec la valeur propre $n-1$ associée. Donc $A\phi_n = \alpha_n\phi_{n-1}$.*
- *$A^\dagger\phi_n$ est vecteur propre avec la valeur propre $n+1$ associée. Donc $A^\dagger\phi_n = \beta_n\phi_{n+1}$.*

Pour trouver les constantes α_n et β_n, on calcule la norme de vecteurs $A\phi_n$ et $A^\dagger\phi_n$. On obtient

$$\begin{aligned}
||A\phi_n||^2 &= (A\phi_n, A\phi_n) = (\phi_n, A^\dagger A\phi_n) = 2(\phi_n, N\phi_n) = 2n(\phi_n,\phi_n) = 2n,\\
||A^\dagger\phi_n||^2 &= (A^\dagger\phi_n, A^\dagger\phi_n) = (\phi_n, AA^\dagger\phi_n) = (\phi_n, \left\{[A,A^\dagger] + A^\dagger A\right\}\phi_n)\\
&= 2(\phi_n,(1+N)\phi_n) = 2(n+1)(\phi_n,\phi_n) = 2(n+1).
\end{aligned}$$

Donc les vecteurs propres normés sont donnés par

$$\phi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2n}}A\phi_n \qquad \text{et} \qquad \phi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}A^\dagger\phi_n,$$

c'est-à-dire $\alpha_n = \sqrt{2n}$ et $\beta_n = \sqrt{2(n+1)}$.

---

g) *[3 points]* Exprimer les vecteur propres normés ϕ_n en fonction de ϕ_0.

Solution : D'après f), on a

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}A^\dagger\phi_0,\\
\phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}}A^\dagger\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2^2\cdot 2!}}(A^\dagger)^2\phi_0,\\
&\dots\\
\phi_n &= \frac{1}{\sqrt{2\cdot n}}A^\dagger\phi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2^n\cdot n!}}(A^\dagger)^n\phi_0.
\end{aligned}$$

Par la suite, nous allons considérer l'effet de H_{an} perturbativement en supposant $\epsilon \ll 1$. Pour cela, nous posons $\psi_n = \phi_n + \epsilon\chi_n$ pour les vecteurs propres et $E_n = 2n+1+\epsilon\lambda_n$ pour les valeurs propres associées.

h) *[3 points]* Extraire le premier ordre en ϵ de l'équation $H[\psi_n] = E_n\psi_n$.

Solution : En partant de l'équation $(H_0+\epsilon H_{\text{an}})(\phi_n+\epsilon\chi_n) = (2n+1+\epsilon\lambda_n)(\phi_n+\epsilon\chi_n)$, au premier ordre en ϵ on trouve

$$H_0\chi_n + H_{\text{an}}\phi_n = (2n+1)\chi_n + \lambda_n\phi_n.$$

---

i) *[3 points]* Démontrer que le produit scalaire $(\phi_n, H_0\chi_n + X^4\phi_n - (2n+1)\chi_n - \lambda_n\phi_n)$ permet d'obtenir

$$\lambda_n = (\phi_n, X^4\phi_n).$$

Solution : On trouve

$$\begin{aligned}
(\phi_n, H_0\chi_n + X^4\phi_n - (2n+1)\chi_n - \lambda_n\phi_n) &= (\phi_n, H_0\chi_n) + (\phi_n, X^4\phi_n) - (\phi_n, (2n+1)\chi_n) - (\phi_n, \lambda_n\phi_n) \\
&= (H_0\phi_n, \chi_n) + (\phi_n, X^4\phi_n) - (2n+1)(\phi_n, \chi_n) - \lambda_n(\phi_n, \phi_n) \\
&= (2n+1)(\phi_n, \chi_n) + (\phi_n, X^4\phi_n) - (2n+1)(\phi_n, \chi_n) - \lambda_n.
\end{aligned}$$

Donc $\lambda_n = (\phi_n, X^4\phi_n)$.

---

j) *[5 points]* Utiliser $X = (A^\dagger + A)/2$ pour calculer λ_0. On note que $A\phi_0 = N\phi_0 = 0$.

Rappel : Les vecteurs propres sont orthonormés, $(\phi_n, \phi_m) = \delta_{n,m}$.

Solution : On utilise

$$X^4 = \frac{1}{16}(A^\dagger + A)^4 = \frac{1}{16}\left((A^\dagger)^2 + A^\dagger A + AA^\dagger + A^2\right)^2.$$

Comme les vecteurs propres correspondant à des n différents sont orthogonaux et, en outre, $A\phi_n = \alpha_n\phi_{n-1}$ *et* $A^\dagger\phi_n = \beta_n\phi_{n+1}$*, il ne faudra garder que les termes qui contiennent le même nombre d'opérateurs* A *et* $A^\dagger$*. Comme* $A\phi_n = 0$*, on peut en plus éliminer tous les termes qui ont un opérateur* A *à droite ou un opérateur* $A^\dagger$ *à gauche. Finalement, on utilise* $AA^\dagger = [A, A^\dagger] + A^\dagger A = 2 + 2N$*. Donc*

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= (\phi_0, X^4\phi_0) = \frac{1}{16}(\phi_0, \left[(AA^\dagger)^2 + A^2(A^\dagger)^2\right]\phi_0) \\
&= \frac{1}{16}\left\{(\phi_0, [2+2N]^2\phi_0) + (\phi_0, A\left[2 + A^\dagger A\right]A^\dagger\phi_0)\right\} \\
&= \frac{1}{16}\left\{2(\phi_0, [2+2N]^2\phi_0) + 2(\phi_0, [2+2N]\phi_0)\right\} = \frac{1}{16}\{2\cdot 4 + 2\cdot 2\}(\phi_0, \phi_0) = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé la première correction aux valeurs propres. Le calcul de la première correction aux vecteurs propres est plus long ...