Université Joseph Fourier
L3 Physique

Julia Meyer
julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Examen final – 10 janvier 2013

Modalités : Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :
- Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
- Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.
- La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seulement une argumentation correcte rapporte des points.

---

1. Transformées de Fourier et Analyse Complexe. *(∼25%)*

Nous souhaitons résoudre l'équation

$$\dot{x} + \rho x = f(t)$$

avec $\rho \in \mathbb{R}_+$.

a) Trouver une équation pour déterminer la TF de $x(t)$.

b) Obtenir $\tilde{x}_\delta(\omega)$ pour le cas $f(t) = \delta(t)$.

c) Utiliser des méthodes de l'analyse complexe pour prendre la TF inverse de $\tilde{x}_\delta(\omega)$ pour le cas $f(t) = \delta(t)$. Justifier toutes les étapes du calcul.

d) Démontrer que dans le cas général la solution peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f(s) x_\delta(t-s).$$

e) Obtenir $x(t)$ pour $f(t) = H(t)e^{-\nu t}$, où $\nu \in \mathbb{R}_+$ et $\nu \neq \rho$. Ici $H(t)$ est la fonction Heaviside.

Rappel : $H(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ sinon.

---

2. Stabilité de Lasers : Calcul des Perturbations. *(∼20%)*

La dynamique d'un laser est donnée par l'intensité du faisceau émis $I(t)$ et une quantité qu'on appelle l'inversion de population $W(t)$. Ces deux quantités sont reliées par les équations différentielles

$$\begin{aligned}
\frac{dI(t)}{dt} &= I(t)W(t), \\
\frac{dW(t)}{dt} &= 1 - r_1 W(t) - [1 + r_2 W(t)]\, I(t),
\end{aligned}$$

où les paramètres $r_1, r_2 > 0$ sont des constantes physiques de l'instrument.

a) Trouver les deux points fixes (I_0, W_0) de ce système.

Pour étudier la stabilité linéaire de ces points fixes, on pose $I(t) = I_0 + \epsilon I_1(t)$ et $W(t) = W_0 + \epsilon W_1(t)$. Par la suite, on obtient une équation différentielle de la forme

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I_1(t) \\ W_1(t) \end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} I_1(t) \\ W_1(t) \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{M}$ est une matrice.

b) Etudier la stabilité linéaire autour du point fixe $(I_0 = 0, W_0 = 1/r_1)$. Donner les valeurs propres de la matrice $\mathbf{M}$. Est-ce que ce point fixe est stable ?

c) Etudier la stabilité linéaire autour du point $(I_0 = 1, W_0 = 0)$. Donner les valeurs propres de la matrice $\mathbf{M}$. Est-ce que ce point fixe est stable ?

d) Discuter, pour le point $(I_0 = 1, W_0 = 0)$, les deux cas $r_1 + r_2 > 2$ et $r_1 + r_2 < 2$.

---

3. Opérateurs Linéaires dans un Espace à 3 Dimensions. *(∼20%)*

L'espace des états $\mathcal{E}$ d'un certain système est à $N = 3$ dimensions. Soit $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ une base orthonormée. Pour un état $\mathbf{u}$ arbitraire, on écrit

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} + u_3\mathbf{e_3} \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Soit A un opérateur linéaire qui dans cette base est décrit par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

a) Trouver l'opérateur adjoint $A^\dagger$.

Rappel : Le produit scalaire est défini par $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{N} u_i^* v_i$.
L'opérateur adjoint obéit à l'équation $(A^\dagger \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A\mathbf{v})$.

On définit maintenant les opérateurs linéaires

$$H = \omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\omega_0 > 0$ et b sont des constantes réelles.

b) Est-ce que H et B sont des opérateurs hermitiens ?

c) Démontrer que H et B commutent.

d) Trouver les valeurs propres de H et B.

e) Donner une base orthonormée de vecteurs propres de B.

f) Est-ce que cette base est aussi une base orthonormée de vecteurs propres de H ?

---

4. Oscillateur Anharmonique : Opérateurs Linéaires et Calcul des Perturbations. *(∼35%)*

L'oscillateur anharmonique est décrit par l'opérateur linéaire (Hamiltonien) $H = H_0 + H_{\text{an}}$ avec

$$H_0 = -D^2 + X^2 \qquad \text{et} \qquad H_{\text{an}} = \epsilon X^4.$$

Ici $D[f(x)] = f'(x)$ et $X[f(x)] = xf(x)$. En outre, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$.

a) Nous introduisons l'opérateur linéaire $A = D + X$ et son adjoint $A^\dagger = -D + X$. Ecrire H en fonction de A et $A^\dagger$.

b) Nous définissons l'opérateur linéaire

$$N = \frac{1}{2}A^\dagger A.$$

Est-ce que N est hermitien ?

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à l'oscillateur harmonique, c'est-à-dire, on pose $\epsilon = 0$ et considère H_0 seulement.

c) Exprimer H_0 en fonction de N. Est-ce que H_0 est hermitien ?

Rappel : $[A, A^\dagger] = 2$.

d) Soit $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base propre orthonormée de N avec $N[\phi_n] = n\phi_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donner les vecteurs et valeurs propres de l'Hamiltonien H_0.

e) Calculer les commutateurs $[N, A]$ et $[N, A^\dagger]$.

f) Démontrer que $A\phi_n$ et $A^\dagger\phi_n$ sont des vecteurs propres de N et déterminer les valeurs propres associées. Démontrer ainsi $A\phi_n = \alpha_n\phi_{n-1}$ et $A^\dagger\phi_n = \beta_n\phi_{n+1}$ avec $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ et déterminer α_n et β_n.

Rappel : Les vecteurs propres sont orthonormés, $(\phi_n, \phi_m) = \delta_{n,m}$.

g) Exprimer les vecteur propres normés ϕ_n en fonction de ϕ_0.

Par la suite, nous allons considérer l'effet de H_{an} perturbativement en supposant $\epsilon \ll 1$. Pour cela, nous posons $\psi_n = \phi_n + \epsilon\chi_n$ pour les vecteurs propres et $E_n = 2n + 1 + \epsilon\lambda_n$ pour les valeurs propres associées.

h) Extraire le premier ordre en ϵ de l'équation $H[\psi_n] = E_n\psi_n$.

i) Démontrer que le produit scalaire $(\phi_n, H_0\chi_n + X^4\phi_n - (2n+1)\chi_n - \lambda_n\phi_n)$ permet d'obtenir

$$\lambda_n = (\phi_n, X^4\phi_n).$$

j) Utiliser $X = (A^\dagger + A)/2$ pour calculer λ_0. On note que $A\phi_0 = N\phi_0 = 0$.

Rappel : Les vecteurs propres sont orthonormés, $(\phi_n, \phi_m) = \delta_{n,m}$.

Nous avons donc trouvé la première correction aux valeurs propres. Le calcul de la première correction aux vecteurs propres est plus long ...