Julia Meyer
julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
CORRIGÉ : Contrôle continu – 13 novembre 2012

1. Séries de Fourier : Corde vibrante avec amortissement. *(31+2 points)*

On considère une corde de longueur L qui est fixée au deux bouts, $y(0,t) = y(L,t) = 0$. L'équations du mouvement de la corde est donnée par

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) - \gamma \frac{\partial}{\partial t} y(x,t),$$

avec $c, \beta > 0$. On choisit la condition initiale $y(x,0) = y_0(x)$ et $\dot{y}(x,0) = 0$. En outre, on suppose $\gamma \ll 2c\pi/L$.

a) *[3 points]* Discuter laquelle de ces séries est la plus appropriée pour résoudre le problème : (i) série de Fourier, (ii) série de sinus ou (iii) série de cosinus.

Solution : A cause des conditions aux bords, $y(0,t) = y(L,t) = 0$, et du fait qu'il n'y a pas de dérivées d'ordre impair en x, la série de sinus est la plus appropriée.

---

b) *[2 points]* Développer $y(x,t)$ en série de sinus.

Solution : La série de sinus prend la forme

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{\pi n x}{L} \qquad \textit{avec} \qquad b_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L dx \; y(x,t) \sin \frac{\pi n x}{L}.$$

---

c) *[5 points]* Démontrer que les coéfficients de la série de sinus obéissent aux équations différentielles

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} b_n(t) = -c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n(t) - \gamma \frac{\partial}{\partial t} b_n(t).$$

Solution : On substitue la série de sinus pour $y(x,t)$ dans l'ED,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{\pi n x}{L} \right] = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{\pi n x}{L} \right] - \gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{\pi n x}{L} \right].$$

Comme $y(x,t)$ est une fonction continue et $y(0,t) = y(L,t)$, on peut dériver la série terme par terme. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[b_n(t) \sin \frac{\pi n x}{L} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[b_n(t) \sin \frac{\pi n x}{L} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[b_n(t) \sin \frac{\pi n x}{L} \right]$$

ou
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\ddot{b}_n(t)+c^2\left(\frac{\pi nx}{L}\right)^2 b_n(t)+\gamma\dot{b}_n(t)\right\}\sin\frac{\pi nx}{L}=0.$$
Comme $\{\sin(\pi nx/L)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *constitue une base, cela implique*
$$\ddot{b}_n(t)+c^2\left(\frac{\pi nx}{L}\right)^2 b_n(t)+\gamma\dot{b}_n(t)=0.$$

---

d) *[4 points]* Déterminer les solutions générales pour les coéfficients $b_n(t)$.

<u>Solution</u> : On définit $\omega_n = c\pi n/L$. *L'ED* $\ddot{b}_n+\gamma\dot{b}_n+\omega_n^2 b_n=0$ *possède la solution générale*
$$b_n(t)=A_n e^{\lambda_n^{(1)}t}+B_n e^{\lambda_n^{(2)}t}$$
ou $\lambda_n(i)$ *sont les solutions de* $(\lambda_n^{(i)})^2+\gamma\lambda_n^{(i)}+\omega_n^2=0$, *c'est-à-dire,*
$$\lambda_n^{(1/2)}=-\frac{\gamma}{2}\pm i\sqrt{\omega_n^2-\frac{\gamma^2}{4}}.$$

---

e) *[5 points]* Trouver les conditions initiales pour les coéfficients $b_n(t)$.

<u>Solution</u> : Pour trouver les conditions initiales pour les coéfficients $b_n(t)$, *on développe la fonction* $y_0(x)$ *en série de sinus,*
$$y_0(x)=\sum_{n=1}^{L}\beta_n\sin\frac{\pi nx}{L}.$$
En outre,
$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(0)\sin\frac{\pi nx}{L}\qquad et\qquad \dot{y}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\dot{b}_n(0)\sin\frac{\pi nx}{L}.$$
Donc $b_n(0)=\beta_n$ *et* $\dot{b}_n=0$. *La solution générale nous donne*
$$b_n(0)=A_n+B_n\qquad et\qquad \dot{b}_n(0)=A_n\lambda_n^{(1)}+B_n\lambda_n^{(2)}.$$
Par conséquent,
$$B_n=-\frac{\lambda_n^{(1)}}{\lambda_n^{(2)}}A_n\qquad et\qquad A_n=\frac{1}{1-\frac{\lambda_n^{(1)}}{\lambda_n^{(2)}}}\beta_n$$
où
$$A_n=\frac{-\frac{\gamma}{2}+i\sqrt{\omega_n^2-\frac{\gamma^2}{4}}}{2i\sqrt{\omega_n^2-\frac{\gamma^2}{4}}}\beta_n\qquad et\qquad B_n=\frac{\frac{\gamma}{2}+i\sqrt{\omega_n^2-\frac{\gamma^2}{4}}}{2i\sqrt{\omega_n^2-\frac{\gamma^2}{4}}}\beta_n.$$
On obtient
$$b_n(t)=\beta_n e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\cos\left(\sqrt{\omega_n^2-\frac{\gamma^2}{4}}\,t\right)-\frac{\gamma}{2\sqrt{\omega_n^2-\frac{\gamma^2}{4}}}\sin\left(\sqrt{\omega_n^2-\frac{\gamma^2}{4}}\,t\right)\right].$$

f) *[3 points]* Discuter le comportement des coéfficients $b_n(t)$ pour $t \to \infty$ et identifier les échelles de temps caractéristiques τ_n.

<u>Solution</u> *: Tous les coéfficients sont amortis exponentiellement sur la même échelle de temps $\tau_n = 2/\gamma$.*

---

g) *[2 points]* Donner la solution pour $y(x,t)$ dans le cas $\gamma = 0$.

<u>Solution</u> *: On trouve*

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos(\omega_n t) \sin \frac{\pi n x}{L}.$$

Par la suite, nous considérons la condition initiale

$$y_0(x) = \begin{cases} 2A\frac{x}{L} & 0 \le x \le \frac{L}{2}, \\ 2A\left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{L}{2} < x \le L. \end{cases}$$

h) *[5 points]* Développer $y_0(x)$ en série de sinus.

<u>Solution</u> *: Les coéfficients β_n sont donnés par*

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{2}{L}\int_0^L dx\; y_0(x) \sin\frac{\pi n x}{L} = \frac{4A}{L^2}\left\{\int_0^{L/2} dx\; x \sin\frac{\pi n x}{L} + \int_{L/2}^{L} dx\; (L-x)\sin\frac{\pi n x}{L}\right\} \\
&= \frac{4A}{L^2}\Bigg\{ -\frac{L}{\pi n}\left[x\cos\frac{\pi n x}{L}\right]_0^{L/2} + \frac{L}{\pi n}\int_0^{L/2} dx\;\cos\frac{\pi n x}{L} \\
&\qquad -\frac{L}{\pi n}\left[(L-x)\cos\frac{\pi n x}{L}\right]_{L/2}^{L} - \frac{L}{\pi n}\int_{L/2}^{L} dx\;\cos\frac{\pi n x}{L}\Bigg\} \\
&= \frac{4A}{L^2}\left\{\left(\frac{L}{\pi n}\right)^2\left[\sin\frac{\pi n x}{L}\right]_0^{L/2} - \left(\frac{L}{\pi n}\right)^2\left[\sin\frac{\pi n x}{L}\right]_{L/2}^{L}\right\} \\
&= \frac{8A}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} \frac{8A}{(\pi(2k-1))^2}(-1)^k & n = 2k+1, \\ 0 & n = 2k. \end{cases}
\end{aligned}$$

---

i) *[2 points]* Obtenir $y(x,t)$ pour cette condition initiale.

Solution : Avec $\Omega_n = \sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2/4}$, on obtient

$$y(x,t) = \frac{8A}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\cos\left(\Omega_{2k+1}t\right) - \frac{\gamma}{2\Omega_{2k+1}}\sin\left(\Omega_{2k+1}t\right)\right]\sin\frac{\pi(2k+1)x}{L}.$$

---

j) *[+ 2 points] Question supplémentaire* : Est-ce que ce modèle vous semble réaliste ?

Solution : Non. En réalité les harmoniques plus élevées sont plus fortement amorties.

---

2. Transformations de Fourier : Diffusion avec dégradation. *(33 points)*

Des particules sont introduits dans un milieu uni-dimensionnel infini à la position $x = 0$ est diffusent dans l'espace en se dégradant au taux α. Le système est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \alpha c + J\delta(x),$$

où $c(x,t)$ est la concentration des particules, i.e., $[c] = 1/L$. On suppose que $c(x,0) = 0$.

a) *[3 points]* Déterminer les dimensions des paramètres D, α et J.

Solution : Avec $[\partial_t c] = 1/(LT)$, on obtient

$$[D] = \frac{1}{LT}[\partial_x^2 c]^{-1} = \frac{L^2}{T}, \qquad [\alpha] = \frac{1}{LT}[c]^{-1} = \frac{1}{T}, \qquad [J] = \frac{1}{LT}[\delta(x)]^{-1} = \frac{1}{T}.$$

---

b) *[4 points]* Trouver l'équation différentielle pour $\tilde{c}(q,t)$, la TF de $c(x,t)$ par rapport à x.

Solution : On prend la TF de toute l'équation,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-iqx}\frac{\partial c}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-iqx}\left\{D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \alpha c + J\delta(x)\right\},$$

pour trouver

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} = -Dq^2\tilde{c} - \alpha\tilde{c} + J.$$

---

c) *[3 points]* Trouver la solution de l'équation différentielle

$$\dot{y}(t) + ay(t) = b,$$

où a, b sont des constantes, avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Solution : La solution générale de l'équation homogène est $y_0(t) = Ae^{-at}$. Une solution particulière de l'équation inhomogène est $y_p(t) = b/a$. Donc la solution générale de l'équation inhomogène est $y(t) = Ae^{-at} + b/a$. La condition initiale $y(0) = 0$ impose $A = -b/a$. Donc

$$y(t) = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right).$$

---

d) *[2 points]* Démontrer que

$$\tilde{c}(q,t) = \frac{J}{Dq^2 + \alpha}\left(1 - e^{-(Dq^2+\alpha)t}\right).$$

Solution : L'ED pour $\tilde{c}(q,t)$ est de la même forme que l'ED résolue en d) avec $a = Dq^2 + \alpha$ et $b = J$. Donc

$$\tilde{c}(q,t) = \frac{J}{Dq^2 + \alpha}\left(1 - e^{-(Dq^2+\alpha)t}\right).$$

---

e) *[5 points]* Trouver la TF de

$$F(x) = e^{-\kappa|x|},$$

où $\kappa > 0$.

Solution : On obtient

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-iqx} \times e^{-\kappa|x|} = \int_{-\infty}^{0} dx\, e^{(\kappa-iq)x} + \int_{0}^{\infty} dx\, e^{-(\kappa+iq)x} \\ &= \frac{1}{\kappa - iq} - \frac{1}{-(\kappa+iq)} = \frac{2\kappa}{q^2+\kappa^2}\end{aligned}$$

---

f) *[2 points]* Déduire du résultat de e) la TF inverse de

$$\tilde{f}(q) = \frac{A}{Bq^2 + C},$$

où $BC > 0$.

Solution : On utilise que

$$\tilde{f}(q) = \frac{A}{B}\frac{1}{q^2 + \frac{C}{B}} = \frac{A}{B} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{B}{C}}\frac{2\sqrt{\frac{C}{B}}}{q^2 + \frac{C}{B}} = \frac{A}{2\sqrt{BC}}\frac{2\kappa}{q^2+\kappa^2}$$

avec $\kappa = \sqrt{C/B}$. Donc

$$f(x) = \frac{A}{2\sqrt{BC}} \exp\left[-\sqrt{\frac{C}{B}}\,|x|\right].$$

g) *[4 points]* Trouver le comportement de $\tilde{c}(q,t)$ pour $t \to \infty$ et en déduire le comportement de $c(x,t)$ pour $t \to \infty$.

Solution : On obtient

$$\tilde{c}_\infty(q) = \lim_{t\to\infty} \tilde{c}(q,t) = \frac{J}{Dq^2 + \alpha}.$$

Donc, en utilisant le résultat de f),

$$c_\infty(x) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{c}_\infty(q)\right] = \frac{J}{2\sqrt{D\alpha}} \exp\left[-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\,|x|\right].$$

---

h) *[5 points]* Trouver la TF inverse de

$$\tilde{g}(q) = e^{-(Dq^2+\alpha)t}.$$

Solution : On obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{iqx} \times e^{-(Dq^2+\alpha)t} = \frac{1}{2\pi} e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{-Dtq^2+ixq} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{-Dt\left(q^2 - 2i\frac{x}{2Dt}q\right)}. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $k = \sqrt{Dt}[q - ix/(2Dt)]$, on trouve

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{iqx} \times e^{-(Dq^2+\alpha)t} = \frac{1}{2\pi} e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{-Dtq^2+ixq} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{Dt}} e^{-\alpha t} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \int_{-\infty - ix/(2Dt)}^{\infty - ix/(2Dt)} dk\; e^{-k^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt} - \alpha t\right]. \end{aligned}$$

---

i) *[5 points]* Donner une expression intégrale pour $c(x,t)$ qui implique $c_\infty(x)$.

Solution : Avec

$$\tilde{c}(q,t) = c_\infty(q)\left[1 - \tilde{g}(q)\right],$$

on obtient

$$\begin{aligned} c(x,t) &= \mathrm{TF}^{-1}\left\{\tilde{c}_\infty(q)\left[1 - \tilde{g}(q)\right]\right\} = \mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{c}_\infty(q)\right] - \mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{c}_\infty(q)\tilde{g}(q)\right] \\ &= c_\infty(x) - \int_{-\infty}^{\infty} ds\; c_\infty(s) g(x-s) \\ &= \frac{J}{2\sqrt{D\alpha}}\left\{\exp\left[-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\,|x|\right] - \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} ds\; \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4Dt} - \sqrt{\frac{\alpha}{D}}\,|s|\right]\right\}. \end{aligned}$$

3. Analyse complexe. *(30+4 points)*

On va considérer la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(z - ia)^3}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

a) *[5 points]* On note $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer que les conditions de Cauchy-Riemann sont équivalentes à la condition $\partial_x f = -i\partial_y f$.

Solution : Les conditions de Cauchy-Riemann sont données par

$$\partial_x u = \partial_y v \qquad et \qquad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Donc

$$\partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_y v - i\partial_y u = -i(\partial_y u + i\partial_y v) = -i\partial_y f.$$

Inversement, $\partial_x f = -i\partial_y f$ implique

$$\Re\left[\partial_x f\right] = \partial_x u = \Re\left[-i\partial_y f\right] = \partial_y v \qquad et \qquad \Im\left[\partial_x f\right] = \partial_x v = \Im\left[-i\partial_y f\right] = -\partial_y u.$$

---

b) *[5 points]* Trouver le domaine sur lequel la fonction $f(z)$ est analytique/holomorphe.

Solution : On utilise la condition démontrée en a). Pour $z \neq ia$, on obtient

$$\begin{aligned}
\partial_x f &= \partial_x \left[\frac{x+iy}{(x+iy-ia)^3}\right] = \frac{(x+iy-ia)^3 - 3(x+iy)(x+iy-ia)^2}{(x+iy-ia)^6} \\
&= \frac{(x+iy-ia) - 3(x+iy)}{(x+iy-ia)^4}, \\
\partial_y f &= \partial_y \left[\frac{x+iy}{(x+iy-ia)^3}\right] = \frac{i(x+iy-ia)^3 - 3i(x+iy)(x+iy-ia)^2}{(x+iy-ia)^6} \\
&= \frac{i(x+iy-ia) - 3i(x+iy)}{(x+iy-ia)^4} = i\partial_x f.
\end{aligned}$$

Donc $\partial_x f = -i\partial_y f$ et la fonction vérifie les conditions de Cauchy-Riemann. En outre, les dérivées partielles sont continues. Donc la fonction $f(z)$ est analytique/holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{ia\}$.

---

c) *[3 points]* Déterminer la position et la nature des singularités de $f(z)$.

Solution : $f(z)$ possède un pôle d'ordre 3 en $z_0 = ia$.

---

d) *[2 points]* Si $f(z)$ possède un pôle d'ordre m en $z = z_0$, la fonction $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ est analytique en $z = z_0$. Donner la fonction $g(z)$ correspondante pour le point singulier de $f(z)$ trouvé en c).

Solution : On trouve

$$g(z) = (z - ia)^3 f(z) = z.$$

---

e) *[4 points]* Donner la série de Taylor de $g(z)$ en $z = z_0$.

Solution : La série de Taylor est donnée par

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - ia)^n \qquad \textit{avec} \qquad b_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(ia).$$

Donc

$$b_0 = g(ia) = ia \qquad \textit{et} \qquad b_1 = g'(ia) = 1,$$

c'est-à-dire,

$$g(z) = ia \times (z - ia)^0 + 1 \times (z - ia)^1.$$

---

f) *[5 points]* Donner la série de Laurent de $f(z)$ en $z = z_0$.

Solution : On utilise la série de Taylor de $g(z)$ pour obtenir

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{(z - ia)^3} g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - ia)^{n-3} = \sum_{k=-3}^{\infty} b_{k+3} (z - ia)^k = \sum_{k=-3}^{\infty} a_k (z - ia)^k.$$

avec $a_k = b_{k+3}$. Donc

$$a_{-3} = ia, \qquad a_{-2} = 1$$

et $a_k = 0$ pour tous autres valeurs de k. C'est-à-dire,

$$f(z) = ia \times (z - ia)^{-3} + 1 \times (z - ia)^{-2}.$$

Par la suite, nous allons nous intéresser à l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{x}{(x - ia)^3}.$$

g) *[3 points]* Trouver un contour C fermé tel que

$$I = \oint dz \, f(z).$$

Justifier le choix du contour.

Solution : On voit que l'intégrant $x/(x-ia)^3 = f(x)$. La fonction $f(z)$ est analytique à part dans des points singuliers isolés. En outre, $f(z)$ décroit comme $1/|z|^2$ pour $|z| \to \infty$. Donc on peut fermer le contour par un demi-cercle de rayon $R \to \infty$. On a le choix d'un demi-cercle dans le plan complexe supérieur ($\Im[z] > 0$) ou inférieur ($\Im[z] < 0$). Comme la fonction n'a qu'un seul point singulier avec $\Im[z_0] > 0$, on choisit de fermer le contour par un demi-cercle dans le plan complexe inférieur.

---

h) *[3 points]* Utiliser le calcul des résidus pour déterminer l'intégrale I.

Solution : On a

$$I = \oint dz\ f(z) = 2\pi i \sum_{z_i;\Im[z_i]<0} \mathrm{Res}(f; z_i).$$

Comme la fonction $f(z)$ ne possède pas de points singuliers avec $\Im[z_i] < 0$, on obtient $I = 0$.

---

i) *[+ 2 points] Question supplémentaire I* : Vérifier votre résultat avec le choix d'un contour différent.

Solution : Si on ferme le contour par un demi-cercle dans le plan complexe supérieur, on obtient

$$I = \oint dz\ f(z) = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f; ia).$$

Avec $\mathrm{Res}(f; ia) = a_{-1} = 0$*, on obtient $I = 0$.*

---

j) *[+ 2 points] Question supplémentaire II* : Trouver une fonction $h(z)$ qui comme $f(z)$ est analytique/holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{ia\}$ et qui comme $f(z)$ possède un pôle d'ordre 3 en $z_0 = ia$, mais pour laquelle on ne peut pas conclure que $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ h(x) = 0$.

Solution : Pour pouvoir fermer le contour, il faut que $h(z)$ décroit comme $1/|z|^2$ pour $|z| \to \infty$ (ou que $h(z) \propto e^{ibz}$ et $\lim_{|z|\to\infty} \left[h(z)e^{-ibz}\right] = 0$). Donc pour $h(z) = z^2/(z-ia)^3$, on ne peut pas conclure que $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ h(x) = 0$.