Université Joseph Fourier
L3 Physique

Julia Meyer
julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Contrôle continu – 13 novembre 2012

Modalités : Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :
- Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
- Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.
- La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seulement une argumentation correcte rapporte des points.

Formules utiles :

Séries de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{I}} f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_{\mathcal{I}} f(x) \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\, dx \qquad b_n = \frac{2}{L} \int_{\mathcal{I}} f(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\, dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2i\pi n x/L} \qquad c_n = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{I}} f(x)\, e^{2i\pi n x/L} dx$$

Séries de sinus et cosinus :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n \frac{x}{L}) \qquad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\pi n \frac{x}{L})\, dx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n \frac{x}{L}) \qquad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(\pi n \frac{x}{L})\, dx$$

Transformées de Fourier :

$$\mathrm{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iqx} dx \qquad \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{f}(q)] = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q)\, e^{iqx} dq$$

Convolutions et corrélations :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f(s) g(x-s) \qquad C_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f^*(s) g(x+s)$$

Séries de Taylor :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Séries de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad a_{-1} = \mathrm{Res}(f; z_0)$$

1. Séries de Fourier : Corde vibrante avec amortissement. (∼*1/3*)

On considère une corde de longueur L qui est fixée au deux bouts, $y(0,t) = y(L,t) = 0$. L'équations du mouvement de la corde est donnée par

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) - \gamma \frac{\partial}{\partial t} y(x,t),$$

avec $c, \beta > 0$. On choisit la condition initiale $y(x,0) = y_0(x)$ et $\dot{y}(x,0) = 0$. En outre, on suppose $\gamma \ll 2c\pi/L$.

a) Discuter laquelle de ces séries est la plus appropriée pour résoudre le problème : (i) série de Fourier, (ii) série de sinus ou (iii) série de cosinus.

b) Développer $y(x,t)$ en série de sinus.

c) Démontrer que les coéfficients de la série de sinus obéissent aux équations différentielles

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} b_n(t) = -c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n(t) - \gamma \frac{\partial}{\partial t} b_n(t).$$

d) Déterminer les solutions générales pour les coéfficients $b_n(t)$.

e) Trouver les conditions initiales pour les coéfficients $b_n(t)$.

f) Discuter le comportement des coéfficients $b_n(t)$ pour $t \to \infty$ et identifier les échelles de temps caractéristiques τ_n.

g) Donner la solution pour $y(x,t)$ dans le cas $\gamma = 0$.

Par la suite, nous considérons la condition initiale

$$y_0(x) = \begin{cases} Ax & 0 \le x \le \frac{L}{2}, \\ A(L-x) & \frac{L}{2} < x \le L. \end{cases}$$

h) Développer $y_0(x)$ en série de sinus.

i) Obtenir $y(x,t)$ pour cette condition initiale.

j) *Question supplémentaire* : Est-ce que ce modèle vous semble réaliste ?

---

2. Transformations de Fourier : Diffusion avec dégradation. (∼*1/3*)

Des particules sont introduits dans un milieu uni-dimensionnel infini à la position $x = 0$ est diffusent dans l'espace en se dégradant au taux α. Le système est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \alpha c + J\delta(x),$$

où $c(x,t)$ est la concentration des particules, i.e., $[c] = 1/L$. On suppose que $c(x,0) = 0$.

a) Déterminer les dimensions des paramètres D, α et J.

b) Trouver l'équation différentielle pour $\tilde{c}(q,t)$, la TF de $c(x,t)$ par rapport à x.

c) Trouver la solution de l'équation différentielle

$$\dot{y}(t) + ay(t) = b,$$

où a, b sont des constantes, avec la condition initiale $y(0) = 0$.

d) Démontrer que

$$\tilde{c}(q,t) = \frac{J}{Dq^2 + \alpha}\left(1 - e^{-(Dq^2+\alpha)t}\right).$$

e) Trouver la TF de

$$F(x) = e^{-\kappa|x|},$$

où $\kappa > 0$.

f) Déduire du résultat de e) la TF inverse de

$$\tilde{f}(q) = \frac{A}{Bq^2 + C},$$

où $BC > 0$.

g) Trouver le comportement de $\tilde{c}(q,t)$ pour $t \to \infty$ et en déduire le comportement de $c(x,t)$ pour $t \to \infty$.

h) Trouver la TF inverse de

$$\tilde{g}(q) = e^{-(Dq^2+\alpha)t}.$$

i) Donner une expression intégrale pour $c(x,t)$ qui implique $c_\infty(x)$.

---

3. Analyse complexe. *(∼1/3)*

On va considérer la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(z - ia)^3}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

a) On note $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer que les conditions de Cauchy-Riemann sont équivalentes à la condition $\partial_x f = -i\partial_y f$.

b) Trouver le domaine sur lequel la fonction $f(z)$ est analytique/holomorphe.

c) Déterminer la position et la nature des singularités de $f(z)$.

d) Si $f(z)$ possède un pôle d'ordre m en $z = z_0$, la fonction $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ est analytique en $z = z_0$. Donner la fonction $g(z)$ correspondante pour le point singulier de $f(z)$ trouvé en c).

e) Donner la série de Taylor de $g(z)$ en $z = z_0$.

f) Donner la série de Laurent de $f(z)$ en $z = z_0$.

Par la suite, nous allons nous intéresser à l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x}{(x - ia)^3}.$$

g) Trouver un contour C fermé tel que

$$I = \oint dz\ f(z).$$

Justifier le choix du contour.

h) Utiliser le calcul des résidus pour déterminer l'intégrale I.

i) *Question supplémentaire I* : Vérifier votre résultat avec le choix d'un contour différent.

j) *Question supplémentaire II* : Trouver une fonction $h(z)$ qui comme $f(z)$ est analytique/holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{ia\}$ et qui comme $f(z)$ possède un pôle d'ordre 3 en $z_0 = ia$, mais pour laquelle on ne peut pas conclure que $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ h(x) = 0$.