Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Examen final – 4 janvier 2011 : CORRIGE

Modalités : Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :
- Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin. **Il n'est pas nécessaire de faire tout l'examen pour obtenir 20/20.**
- Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.
- La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seulement une argumentation correcte rapporte des points.

Formules utiles :

Transformées de Fourier :

$$\mathrm{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iqx} dx \qquad \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{f}(q)] = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q)\, e^{iqx} dq$$

Coordonnées sphériques :

$$x = r\cos\phi\sin\theta \qquad y = r\sin\phi\sin\theta \qquad z = r\cos\theta$$

---

1. Analyse complexe. *(25 points)*

a) *(12 points)* On veut évaluer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} dx\, \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

en utilisant l'analyse complexe

(i) *(3 points)* Trouver un contour fermé dans le plan complexe qui permet de évaluer cette intégrale.

<u>Solution</u> *: On remarque que*

$$\int_0^{\infty} dx\, \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

Maintenant on peut fermer le contour dans le plan complexe $\Im[z] > 0$ par un demi-cercle de rayon $R \to \infty$. [REMARQUE : Le choix de fermer dans le plan complexe $\Im[z] < 0$ est aussi bien valable. Par contre, les pôles vont être entouré dans le sens mathématique négatif et il faut donc faire attention aux signes.]

(ii) *(3 points)* Trouver les pôles de la fonction à intégrer et déterminer leur ordre.

Solution :

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}$$

Donc les 4 pôles sont $z_{1\pm} = \pm i$ *et* $z_{2\pm} = \pm 2i$*. Tous ces pôles sont du premier ordre.*

(iii) *(4 points)* Déterminer lesquels des pôles trouvés en (ii) sont à l'intérieur du contour choisi en (i) et trouver les résidus pour ces pôles.

Solution : Les pôles avec une partie imaginaire positive, $\Im[z] > 0$*, sont à l'intérieur du contour.*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f; z_{1+}) &= \frac{1}{(z_{1+}+i)(z_{1+}-2i)(z_{1+}+2i)} = \frac{1}{(i+i)(i-2i)(i+2i)} = \frac{1}{6i} \\
\mathrm{Res}(f; z_{2+}) &= \frac{1}{(z_{2+}-i)(z_{2+}+i)(z_{2+}+2i)} = \frac{1}{(2i-i)(2i+i)(2i+2i)} = -\frac{1}{12i}
\end{aligned}$$

(iv) *(2 points)* Evaluer l'intégrale.

Solution : On utilise le calcul des résidus pour obtenir

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dx\, \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} &= \frac{1}{2}\oint_{C_+} dz\, \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} \\
&= \frac{1}{2} 2\pi i \left\{\mathrm{Res}(f; z_{1+}) + \mathrm{Res}(f; z_{1+})\right\} = \pi i \left\{\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i}\right\} = \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

---

b) *(13 points)* Au partiel, nous avons trouvé que la TF de la solution du oscillateur amorti, forcé décrit pas l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \alpha\frac{d}{dt}x(t) + \beta x(t) = \delta(t-t_0)$$

est donnée par

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{e^{-i\omega t_0}}{-\omega^2 + i\alpha\omega + \beta}.$$

Rappeler les signes de α et β. Trouver $x(t)$ en utilisant le calcul des résidus.

Solution : On utilise la définition de la TF inverse,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

On utilise le lemme de Jordan pour trouver un contour fermé dans le plan complexe. L'intégrant est donné par

$$\frac{1}{-\omega^2 + i\alpha\omega + \beta} e^{i\omega(t-t_0)}.$$

Pour $t - t_0 > 0$*, on ferme dans le plan complexe* $\Im[z] > 0$*. Pour* $t - t_0 < 0$*, on ferme dans le plan complexe* $\Im[z] < 0$*. Donc,*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\left\{H(t-t_0)\oint_{C_+} \tilde{x}(z) e^{izt} dz + H(-t+t_0)\oint_{C_-} \tilde{x}(z) e^{izt} dz\right\}.$$

On trouve les pôles,

$$-\omega^2 + i\alpha\omega + \beta = 0,$$

donc $z_\pm = \frac{i}{2}\alpha \pm \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$. *Avec* $\Im[z_\pm] > 0$, *on obtient*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} H(t-t_0) \times 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\left(\tilde{x}(z)e^{izt}, z_+\right) + \mathrm{Res}\left(\tilde{x}(z)e^{izt}, z_-\right) \right\}.$$

Les résidus peuvent être calculés en utilisant

$$\tilde{x}(z)e^{izt} = -\frac{1}{(z-z_+)(z-z_-)} e^{iz(t-t_0)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} x(t) &= iH(t-t_0) \left\{ -\frac{1}{z_+ - z_-} e^{iz_+(t-t_0)} - \frac{1}{z_- - z_+} e^{iz_-(t-t_0)} \right\} \\ &= -iH(t-t_0) \frac{1}{2\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} \left\{ e^{i\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}\,(t-t_0)} - e^{-i\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}\,(t-t_0)} \right\} \\ &= H(t-t_0) \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} \sin\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}\,(t-t_0) \right). \end{aligned}$$

---

2. Système prédateurs-proies. *(30 points)*

En cours nous avons considéré le modèle de Lotka-Volterra. Soit P le nombre des prédateurs et N le nombre des proies dans l'écosystème. Lotka et Volterra ont proposé

$$\begin{aligned} dN/dt &= \alpha N - \beta NP, \\ dP/dt &= \gamma NP - \delta P. \end{aligned}$$

α est le taux de croissance naturel des proies en l'absence des prédateurs. La présence des prédateurs cause la disparition des proies, proportionnellement au nombre de prédateurs et de proies, d'où le terme en $-\beta NP$ dans la première équation, β étant l'efficacité de la chasse. Dans l'équation qui régit la dynamique des prédateurs, nous voyons que la croissance est fonction du nombre de proies disponible, et le terme δ est le taux de mort naturel des prédateurs.

Pour tenir compte des ressources limitées, on introduit un terme supplémentaire pour obtenir

$$\begin{aligned} dN/dt &= \alpha N - \kappa N^2 - \beta NP, && (1) \\ dP/dt &= \gamma NP - \delta P, && (2) \end{aligned}$$

avec $\kappa > 0$.

On va commencer par la dynamique des proies pour $\beta = 0$.

a) *(2 points)* Décrire la signification du terme $\propto \kappa$ dans l'équation (1).

Solution : Ce terme décrit une compétition entre les proies qui les empêche de devenir trop nombreux.

---

b) *(2 points)* Trouver le(s) point(s) d'équilibre N_0.

Solution : Les points d'équilibre correspondent à $\alpha N - \kappa N^2 = (\alpha - \kappa N)N = 0$. *Donc il y a 2 points d'équilibre,* $N_0 = 0$ *et* $N_0 = \alpha/\kappa$.

---

c) *(4 points)* Etudier la dynamique des proies proche de ce(s) point(s) d'équilibre, c'est-à-dire, pour $N = N_0 + \epsilon N_1$. Déterminer la stabilité.

Solution : L'équation pour N_1 prend la forme

$$dN_1/dt = \alpha N_1 - 2\kappa N_0 N_1.$$

— *Pour $N_0 = 0$, on obtient*

$$dN_1/dt = \alpha N_1 \qquad \Rightarrow \qquad N_1(t) = N_1(0)e^{\alpha t}.$$

Donc, pour $\alpha > 0$, le point $N_0 = 0$ est instable.

— *Pour $N_0 = 0$, on obtient*

$$dN_1/dt = \alpha N_1 - 2\kappa \frac{\alpha}{\kappa} N_1 = -\alpha N_1 \qquad \Rightarrow \qquad N_1(t) = N_1(0)e^{-\alpha t}.$$

Donc, pour $\alpha > 0$, le point $N_0 = \alpha/\kappa$ est stable.

---

d) *(5 points)* Trouver le prochain ordre $N = N_0 + \epsilon N_1 + \epsilon^2 N_2$ pour $N_0 = \alpha/\kappa$.

Solution : L'équation pour N_2 prend la forme

$$dN_2/dt = \alpha N_2 - 2\kappa N_0 N_2 - \kappa N_1^2 = -\alpha N_2 - \kappa (N_1(0))^2 e^{-2\alpha t}.$$

On a donc à résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre. La solution générale de l'équation homogène est

$$N_2^{(\mathrm{g})}(t) = C_{\mathrm{g}} e^{-\alpha t}.$$

Une équation particulière de l'équation complète est

$$N_2^{(\mathrm{p})}(t) = C_{\mathrm{p}} e^{-2\alpha t},$$

où C_{p} est déterminé par l'équation

$$-2\alpha C_{\mathrm{p}} = -\alpha C_{\mathrm{p}} - \kappa (N_1(0))^2 \qquad \Rightarrow \qquad C_{\mathrm{p}} = \frac{\kappa}{\alpha}(N_1(0))^2.$$

Finalement,

$$N_2(t) = C_{\mathrm{g}} e^{-\alpha t} + \frac{\kappa}{\alpha}(N_1(0))^2 e^{-2\alpha t},$$

et, avec les conditions initiales,

$$N_2(t) = \left(N_2(0) - \frac{\kappa}{\alpha}(N_1(0))^2 \right) e^{-\alpha t} + \frac{\kappa}{\alpha}(N_1(0))^2 e^{-2\alpha t}.$$

---

e) *(3 points)* Soit $N_{\mathrm{initial}} = N(t=0)$. Trouver la solution exacte $N(t)$ de l'équation (1).

Solution : L'équation (1) pour $\beta = 0$ peut être résolue par séparation des variables :

$$\frac{dN}{\alpha N - \kappa N^2} = dt.$$

On obtient

$$t \quad = \quad \frac{1}{\alpha} \int_{N_{\mathrm{initial}}}^{N(t)} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{\frac{\alpha}{\kappa} - N} \right) dN = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{N(t)(\frac{\alpha}{\kappa} - N_{\mathrm{initial}})}{N_{\mathrm{initial}}(\frac{\alpha}{\kappa} - N(t))}.$$

Donc

$$N_{\text{initial}}(\frac{\alpha}{\kappa} - N(t))e^{\alpha t} \quad = \quad N(t)(\frac{\alpha}{\kappa} - N_{\text{initial}}),$$

et finalement

$$N(t) = \frac{N_{\text{initial}}\frac{\alpha}{\kappa}e^{\alpha t}}{\frac{\alpha}{\kappa} + N_{\text{initial}}(e^{\alpha t} - 1)}.$$

Maintenant on va considérer le système complet, Eqs. (1) et (2), pour $\beta \neq 0$.

f) *(3 points)* Déterminer les points d'équilibre. Pour quelles valeurs de κ est-ce qu'ils existent ?

Solution : Les points d'équilibre correspondent à

$$N(\alpha - \kappa N - \beta P) = 0 \quad \text{et} \quad (\gamma N - \delta)P = 0.$$

Donc il y a 3 points d'équilibre possibles :
- $N_0 = P_0 = 0$ *pour tous* κ
- $N_0 = \frac{\alpha}{\kappa}$ *et* $P_0 = 0$ *pour tous* κ
- $N_0 = \frac{\delta}{\gamma}$ *et* $P_0 = \frac{1}{\beta}(\alpha - \kappa\frac{\delta}{\gamma})$ *pour* $\kappa < \frac{\alpha\gamma}{\delta}$ *parce que* $P \geq 0$

---

g) *(7 points)* Etudier la dynamique proche du point $N_0 = \delta/\gamma$ et $P_0 = \alpha/\beta - \kappa\delta/(\beta\gamma)$. Déterminer la stabilité.

Solution : Les équations pour N_1 *et* P_1 *prennent la forme*

$$\begin{aligned} dN_1/dt &= \alpha N_1 - 2\kappa N_0 N_1 - \beta N_0 P_1 - \beta N_1 P_0 = -\frac{\kappa\delta}{\gamma}N_1 - \frac{\beta\delta}{\gamma}P_1, \\ dP_1/dt &= \gamma N_0 P_1 + \gamma N_1 P_0 - \delta P_1 = \frac{1}{\beta}(\alpha\gamma - \kappa\delta)N_1. \end{aligned}$$

Les deux équations peuvent être combinées dans une équation matricielle :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa\delta}{\gamma} & -\frac{\beta\delta}{\gamma} \\ \frac{1}{\beta}(\alpha\gamma - \kappa\delta) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer la stabilité, il faut trouver les valeurs propres de la matrice,

$$\det\left[\begin{pmatrix} -\frac{\kappa\delta}{\gamma} & -\frac{\beta\delta}{\gamma} \\ \frac{1}{\beta}(\alpha\gamma - \kappa\delta) & 0 \end{pmatrix} - \lambda\mathbb{1}\right] = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (-\frac{\kappa\delta}{\gamma} - \lambda)(-\lambda) - \frac{1}{\beta}(\alpha\gamma - \kappa\delta)(-\frac{\beta\delta}{\gamma}) = 0.$$

Donc

$$\lambda_\pm = -\frac{\kappa\delta}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{\kappa^2\delta^2}{4\gamma^2} - \frac{\delta}{\gamma}(\alpha\gamma - \kappa\delta)}.$$

Comme $\alpha\gamma - \kappa\delta > 0$, *on trouve* $\Re[\lambda_\pm] \leq 0$ *et donc le pont d'équilibre est stable. On obtient*

$$N_1 = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \quad \text{et} \quad P_1 = Ce^{\lambda_+ t} + De^{\lambda_- t},$$

où deux coéfficients sont déterminés par les ED qui lient N_1 *et* P_1 *et les deux autres sont déterminés par les conditions initiales.*

---

h) *(4 points)* Tracer la courbe paramétrique $(N(t), P(t))$ pour $\kappa = 0$ et les conditions initiales suivantes :

(i) *(2 points)* $N(t=0) = \epsilon a$ et $P(t=0) = 0$ avec $a > 0$

<u>Solution</u> : Pour $\kappa = 0$, on obtient le cas traité en cours et TD où $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{\alpha\delta}$. Par contre, les conditions initiales données ici ne sont pas proches de $(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta})$, mais proches de $(0,0)$. Dans ce cas là, les équations pour N_1 et P_1 sont découplées et les conditions initiales données donnent

$$N_1(t) = ae^{\alpha t} \quad \text{et} \quad P_1(t) = 0.$$

(ii) *(2 points)* $N(t=0) = \delta/\gamma + \epsilon a$ et $P(t) = \alpha/\beta$ avec $a > 0$

<u>Solution</u> : Pour $\kappa = 0$, on a $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{\alpha\delta}$. En outre,

$$N_1 = Ae^{i\sqrt{\alpha\delta}\,t} + Be^{i\sqrt{\alpha\delta}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad P_1 = -\frac{\gamma}{\beta\delta}\frac{dN_1}{dt} = -\frac{\gamma}{\beta\delta}\sqrt{\alpha\delta}(Ae^{i\sqrt{\alpha\delta}\,t} - Be^{i\sqrt{\alpha\delta}\,t}).$$

Avec $N_1(t=0) = a$ et $P_1(t=0) = 0$, on obtient

$$N_1 = a\cos\left(\sqrt{\alpha\delta}\,t\right) \quad \text{et} \quad P_1 = a\frac{\gamma}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\sin\left(\sqrt{\alpha\delta}\,t\right)$$

et, donc,

$$N_1^2 + \frac{\delta\beta^2}{\alpha\gamma^2}P_1^2 = a^2,$$

ce qui décrit une ellipse.

---

3. *(20 points)* Opérateur moment cinétique. *(∼20%)*

Dans l'espace des fonctions à trois variables, l'opérateur L_z est définie en coordonnées cartésiennes par

$$L_z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

a) *(3 points)* En utilisant les règles de dérivation en chaîne, démontrer que $L_z = \partial/\partial\phi$, où, en coordonnées sphériques, ϕ est la variable qui mesure l'angle de la projection du vecteur sur le plan $x - y$ avec l'axe x.

<u>Solution</u> : Avec $x = r\cos\phi\sin\theta$ et $y = r\sin\phi\sin\theta$, on trouve

$$\frac{\partial x}{\partial\phi} = -r\sin\phi\sin\theta = -y \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial\phi} = r\cos\phi\sin\theta = x.$$

Donc

$$L_z = \frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\phi}.$$

---

b) *(3 points)* Que représente l'opérateur $\exp[\alpha L_z]$ où α est un scalaire réel ? Evaluer $\exp[\alpha L_z]f(r,\theta,\phi)$, où f est une fonction à valeurs complexes de trois variables ($f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$).

<u>Solution</u> : On sait

$$\exp[\alpha L_z] = \exp[\alpha\partial_\phi] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\alpha^n\frac{\partial^n}{\partial\phi^n}$$

. Donc

$$\exp[\alpha L_z]f(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\alpha^n\frac{\partial^n}{\partial\phi^n}f(r,\theta,\phi) = f(r,\theta,\phi+\alpha),$$

c'est-à-dire, l'opérateur $\exp[\alpha L_z]$ représente une rotation autour de l'axe z d'un angle α.

---

c) *(3 points)* Dans l'espace des fonctions à valeurs complexes de trois variables, donner la forme générale, en coordonnées sphériques, des fonctions propres et des valeurs propres de l'opérateur L_z. Démontrer en particulier que les valeurs propres doivent s'écrire comme $\pm in$, où n est un nombre entier.

[Help : f doit être périodique dans la variable angulaire ϕ.]

<u>Solution</u> : On cherche une fonction f tel que

$$L_z f = \frac{\partial}{\partial\phi} f = \lambda f.$$

C'est le cas pour $f(r,\theta,\phi) = g(r,\theta)e^{\lambda\phi}$, où $g(r,\theta)$ est une fonction arbitraire. La fonction f doit être 2π-périodique, $f(r,\theta,\phi) = f(r,\theta,\phi+2\pi)$, ce qui donne la condition $2\pi\lambda = \pm in2\pi$ ou $\lambda = \pm in$.

---

d) *(3 points)* Donner la définition du produit scalaire dans l'espace des fonctions à valeurs complexes d'une variable. Généraliser à l'espace des fonctions à valeurs complexes de trois variables.

<u>Solution</u> : $(f,g) = \int f^*(x)g(x)\,dx$ peut être généralisé à

$$(f,g) = \int f^*(x,y,z)g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int f^*(x,y,z)g(x,y,z)\,dV.$$

---

e) *(2 points)* Dans l'espace mentionné ci-dessus, est ce que l'opérateur L_z est hermitien ? Est-ce que l'opérateur iL_z est hermitien ?

<u>Solution</u> : On trouve

$$\begin{aligned}(f, L_z g) &= \int f^*(r,\theta\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}g(r,\theta,\phi)\,dV \\ &= -\int \frac{\partial}{\partial\phi}f^*(r,\theta\phi)g(r,\theta,\phi)\,dV = -(L_z f, g).\end{aligned}$$

Donc L_z n'est pas hermitien. Par contre,

$$\begin{aligned}(f, iL_z g) &= \int f^*(r,\theta\phi)i\frac{\partial}{\partial\phi}g(r,\theta,\phi)\,dV \\ &= -\int i\frac{\partial}{\partial\phi}f^*(r,\theta\phi)g(r,\theta,\phi)\,dV = (iL_z f, g).\end{aligned}$$

Donc, iL_z est hermitien.

---

f) *(2 points)* Donner les expressions pour L_x et L_y en coordonnées cartésiennes.

<u>Solution</u> : $L_x = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$ et $L_y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$

---

g) *(3 points)* On connait le commutateur $[L_x, L_y] = -L_z$. Les autres commutateurs peuvent être déduits par permutation circulaire. En utilisant ces commutateurs, trouver $[L^2, L_z]$ où $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.

<u>Solution</u> :

$$\begin{aligned}[L^2, L_z] &= [L_x^2, L_z] + [L_y^2, L_z] + [L_z^2, L_z] = L_x[L_x, L_z] + [L_x, L_z]L_x + L_y[L_y, L_z] + [L_y, L_z]L_y \\ &= L_xL_y + L_yL_x + L_y(-L_x) + (-L_x)L_y = 0\end{aligned}$$

h) *(1 points)* Vous avez déjà trouvé les fonctions et valeurs propres de L_z. Est-ce qu'on peut en déduire quelque chose sur les fonctions et/ou valeurs propres de L^2 ?

Solution : *Comme L^2 est L_z commutent, ils ont les mêmes fonctions propres.*

---

4. Stabilité de surfaces. *(25 points)*

Considérons une interface définie par la fonction $u(x,t)$ vérifiant l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -au - bu^3 + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{3}$$

avec $a, b, d \geq 0$.

On va commencer par étudier de l'équation linéaire pour $b = 0$.

a) *(1 points)* L'équation (3) pour $b = 0$ peut être écrite sous la forme $\partial_t u = \mathcal{L}u$, où $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire. Donner l'expression pour $\mathcal{L}$.

Solution : $\mathcal{L} = -a + c\frac{\partial^2}{\partial x^2} - d\frac{\partial^4}{\partial x^4}$

---

b) *(2 points)* Résoudre symboliquement l'équation $\partial_t u = \mathcal{L}u$.

Solution : *On trouve $u(x,t) = e^{\mathcal{L}t}u(x,0)$.*

---

c) *(4 points)* Chercher les fonctions et valeurs propres de $\mathcal{L}$.
[Help : S'inspirer des TFs.]

Solution : *$\mathcal{L}$ contient des dérivées par rapport à x. On sait que $\partial_x e^{iqx} = iqe^{iqx}$. Donc e^{iqx} est une fonction propre de l'opérateur linéaire $D \equiv \partial_x$. Comme $\mathcal{L} = -a + cD^2 - dD^4$, on obtient*

$$\mathcal{L}e^{iqx} = (-a - cq^2 - dq^4)e^{iqx},$$

c'est-à-dire, e^{iqx} est une fonction propre de $\mathcal{L}$ associée avec la valeur propre $\lambda_q = -a - cq^2 - dq^4$. Des TF, on sait que $\{e^{iqx}\}_{q\in\mathbb{R}}$ est une base orthogonale de l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

---

d) *(3 points)* Exprimer $u(x, t = 0) = f(x)$ en fonction des fonctions propres de $\mathcal{L}$.

Solution : *Comme e^{iqx} est une base, on peut écrire*

$$u(x, t = 0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dq\; c(q)e^{iqx}.$$

La comparaison avec les TF donne

$$c(q) = \frac{1}{2\pi}\tilde{f}(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\; f(x)e^{-iqx}.$$

---

e) *(4 points)* En utilisant le résultat de b), donner une expression intégrale pour $u(x,t)$ en fonction des fonctions propres de $\mathcal{L}$.

<u>Solution</u> : *D'après b), on a* $u(x,t) = e^{\mathcal{L}t}u(x,0)$*. Avec le résultat de d), cela devient*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{\mathcal{L}t}\int_{-\infty}^{\infty} dq\ c(q)e^{iqx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq\ c(q)e^{\mathcal{L}t}e^{iqx}. \end{aligned}$$

Comme e^{iqx} *est une fonction propre de* $\mathcal{L}$ *avec la valeur propre* λ_q*, on obtient* $e^{\mathcal{L}t}e^{iqx} = e^{\lambda_q t}e^{iqx}$ *et, donc,*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq\ c(q)e^{(-a-cq^2-dq^4)t}e^{iqx}.$$

---

f) *(4 points)* Evaluer $u(x,t)$ pour $f(x) = \delta(x)$ ainsi que $c > 0$ et $d = 0$.

<u>Solution</u> : *En prenant la TF de* $\delta(x)$*, on obtient* $c(q) = \frac{1}{2\pi}$*. Donc,*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\ e^{(-a-cq^2)t}e^{iqx} \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-at}\int_{-\infty}^{\infty} dq\ e^{-ct(q^2-iq\frac{x}{ct})} = \frac{1}{2\pi}e^{-at}\int_{-\infty}^{\infty} dq\ e^{-ct(q^2-i\frac{x}{2ct})^2-\frac{x^2}{4ct}} = \frac{1}{2\pi}e^{-at}\sqrt{\frac{\pi}{ct}}e^{-\frac{x^2}{4ct}}. \end{aligned}$$

<u>Maintenant on va considérer l'équation complète pour $b \neq 0$.</u>

g) *(2 points)* On veut considérer la stabilité linéaire de la solution $u_0(x,t) = 0$. Est-ce que le résultat dépend de la valeur de b ? A quel ordre en ϵ est-ce que le coéfficient b apparaît ?

<u>Solution</u> : *Non. Le coéfficient* b *apparaît à l'ordre 3 seulement.*

---

h) *(5 points)* Utiliser le résultat de e) pour trouver la stabilité linéaire en supposant $c < 0$.

<u>Solution</u> : *La solution* $u = 0$ *est stable si le coéfficient* α *dans l'exposant,* $e^{\alpha t}$ *est négatif. Donc, il faut*

$$\lambda_q = -a - cq^2 - dq^4 \leq 0.$$

On sait $\lambda_q = 0$ *pour* $q^2 = -\frac{c}{2d} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4d^2} - \frac{a}{d}}$*. Par symétrie, il suffit de considérer les solutions* $q > 0$*. Pour* $a, d > 0$ *et* $c < 0$*, il n'y pas de solutions réelles pour* $a > c^2/(4d)$ *tandis qu'il y a deux solutions réelles*

$$q_{\pm} = \sqrt{-\frac{c}{2d} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4d^2} - \frac{a}{d}}}$$

pour $a < c^2/(4d)$*. Comme* $\lambda_0 < 0$ *et* $\lambda_{|q|\to\infty} \to -\infty$*, il y a une instabilité pour les valeurs* $|q_-| < |q| < |q_+|$ *où* λ_q *devient positif.*