Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Examen final – 4 janvier 2011

Modalités : Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :
- Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin. **Il n'est pas nécessaire de faire tout l'examen pour obtenir 20/20.**
- Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.
- La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seulement une argumentation correcte rapporte des points.

Formules utiles :

Transformées de Fourier :

$$\mathrm{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iqx} dx \qquad \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{f}(q)] = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q)\, e^{iqx} dq$$

Coordonnées sphériques :

$$x = r\cos\phi\sin\theta \qquad y = r\sin\phi\sin\theta \qquad z = r\cos\theta$$

---

1. Analyse complexe. *(∼25%)*

a) On veut évaluer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} dx\, \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

en utilisant l'analyse complexe

(i) Trouver un contour fermé dans le plan complexe qui permet de évaluer cette intégrale.

(ii) Trouver les pôles de la fonction à intégrer et déterminer leur ordre.

(iii) Déterminer lesquels des pôles trouvés en (ii) sont à l'intérieur du contour choisi en (i) et trouver les résidus pour ces pôles.

(iv) Evaluer l'intégrale.

b) Au partiel, nous avons trouvé que la TF de la solution du oscillateur amorti, forcé décrit pas l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \alpha\frac{d}{dt}x(t) + \beta x(t) = \delta(t-t_0)$$

est donnée par

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{e^{-i\omega t_0}}{-\omega^2 + i\alpha\omega + \beta}.$$

Rappeler les signes de α et β. Trouver $x(t)$ en utilisant le calcul des résidus.

---

2. Système prédateurs-proies. *(∼30%)*

En cours nous avons considéré le modèle de Lotka-Volterra. Soit P le nombre des prédateurs et N le nombre des proies dans l'écosystème. Lotka et Volterra ont proposé

$$\begin{aligned} dN/dt &= \alpha N - \beta NP, \\ dP/dt &= \gamma NP - \delta P. \end{aligned}$$

α est le taux de croissance naturel des proies en l'absence des prédateurs. La présence des prédateurs cause la disparition des proies, proportionnellement au nombre de prédateurs et de proies, d'où le terme en $-\beta NP$ dans la première équation, β étant l'efficacité de la chasse. Dans l'équation qui régit la dynamique des prédateurs, nous voyons que la croissance est fonction du nombre de proies disponible, et le terme δ est le taux de mort naturel des prédateurs.

Pour tenir compte des ressources limitées, on introduit un terme supplémentaire pour obtenir

$$\begin{aligned} dN/dt &= \alpha N - \kappa N^2 - \beta NP, &(1) \\ dP/dt &= \gamma NP - \delta P, &(2) \end{aligned}$$

avec $\kappa > 0$.

<u>On va commencer par la dynamique des proies pour $\beta = 0$.</u>

a) Décrire la signification du terme $\propto \kappa$ dans l'équation (1).

b) Trouver le(s) point(s) d'équilibre N_0.

c) Etudier la dynamique des proies proche de ce(s) point(s) d'équilibre, c'est-à-dire, pour $N = N_0 + \epsilon N_1$. Déterminer la stabilité.

d) Trouver le prochain ordre $N = N_0 + \epsilon N_1 + \epsilon^2 N_2$ pour $N_0 = \alpha/\kappa$.

e) Soit $N_{\text{initial}} = N(t = 0)$. Trouver la solution exacte $N(t)$ de l'équation (1).

<u>Maintenant on va considérer le système complet, Eqs. (1) et (2), pour $\beta \neq 0$.</u>

f) Déterminer les points d'équilibre. Pour quelles valeurs de κ est-ce qu'ils existent ?

g) Etudier la dynamique proche du point $N_0 = \delta/\gamma$ et $P_0 = \alpha/\beta - \kappa\delta/(\beta\gamma)$. Déterminer la stabilité.

h) Tracer la courbe paramétrique $(N(t), P(t))$ pour $\kappa = 0$ et les conditions initiales suivantes :
(i) $N(t = 0) = \epsilon a$ et $P(t = 0) = 0$ avec $a > 0$
(ii) $N(t = 0) = \delta/\gamma + \epsilon a$ et $P(t) = \alpha/\beta$ avec $a > 0$

---

3. Opérateur moment cinétique. *(∼20%)*

Dans l'espace des fonctions à trois variables, l'opérateur L_z est définie en coordonnées cartésiennes par

$$L_z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

a) En utilisant les règles de dérivation en chaîne, démontrer que $L_z = \partial/\partial\phi$, où, en coordonnées sphériques, ϕ est la variable qui mesure l'angle de la projection du vecteur sur le plan $x - y$ avec l'axe x.

b) Que représente l'opérateur $\exp[\alpha L_z]$ où α est un scalaire réel ? Evaluer $\exp[\alpha L_z] f(r, \theta, \phi)$, où f est une fonction à valeurs complexes de trois variables ($f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$).

c) Dans l'espace des fonctions à valeurs complexes de trois variables, donner la forme générale, en coordonnées sphériques, des fonctions propres et des valeurs propres de l'opérateur L_z. Démontrer en particulier que les valeurs propres doivent s'écrire comme $\pm in$, où n est un nombre entier.

[Help : f doit être périodique dans la variable angulaire ϕ.]

d) Donner la définition du produit scalaire dans l'espace des fonctions à valeurs complexes d'une variable. Généraliser à l'espace des fonctions à valeurs complexes de trois variables.

e) Dans l'espace mentionné ci-dessus, est ce que l'opérateur L_z est hermitien ? Est-ce que l'opérateur iL_z est hermitien ?

f) Donner les expressions pour L_x et L_y en coordonnées cartésiennes.

g) On connait le commutateur $[L_x, L_y] = -L_z$. Les autres commutateurs peuvent être déduits par permutation circulaire. En utilisant ces commutateurs, trouver $[L^2, L_z]$ où $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.

h) Vous avez déjà trouvé les fonctions et valeurs propres de L_z. Est-ce qu'on peut en déduire quelque chose sur les fonctions et/ou valeurs propres de L^2 ?

---

4. Stabilité de surfaces. *(∼25%)*

Considérons une interface définie par la fonction $u(x,t)$ vérifiant l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -au - bu^3 + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{3}$$

avec $a, b, d \geq 0$.

On va commencer par étudier de l'équation linéaire pour $b = 0$.

a) L'équation (3) pour $b = 0$ peut être écrite sous la forme $\partial_t u = \mathcal{L}u$, où $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire. Donner l'expression pour $\mathcal{L}$.

b) Résoudre symboliquement l'équation $\partial_t u = \mathcal{L}u$.

c) Chercher les fonctions et valeurs propres de $\mathcal{L}$.

[Help : S'inspirer des TFs.]

d) Exprimer $u(x, t = 0) = f(x)$ en fonction des fonctions propres de $\mathcal{L}$.

e) En utilisant le résultat de b), donner une expression intégrale pour $u(x,t)$ en fonction des fonctions propres de $\mathcal{L}$.

f) Evaluer $u(x,t)$ pour $f(x) = \delta(x)$ ainsi que $c > 0$ et $d = 0$.

Maintenant on va considérer l'équation complète pour $b \neq 0$.

g) On veut considérer la stabilité linéaire de la solution $u_0(x,t) = 0$. Est-ce que le résultat dépend de la valeur de b ? A quel ordre en ϵ est-ce que le coéfficient b apparaît ?

h) Utiliser le résultat de e) pour trouver la stabilité linéaire en supposant $c < 0$.