Université Joseph Fourier
L3 Physique

Julia Meyer
julia.meyer@ujf-grenoble.fr

# L3 – Mathématique pour la physique
# Contrôle continu – 3 novembre 2011

**Modalités :** Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :
- Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles (en particulier, les questions marquées par $^{(**)}$) à la fin.
- Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.
- La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seulement une argumentation correcte rapporte des points.

---

**Formules utiles :**

Séries de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{I}} f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_{\mathcal{I}} f(x) \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\, dx \qquad b_n = \frac{2}{L} \int_{\mathcal{I}} f(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\, dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2i\pi n x/L} \qquad\qquad c_n = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{I}} f(x)\, e^{2i\pi n x/L} dx$$

Transformées de Fourier :

$$\mathrm{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iqx} dx \qquad\qquad \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{f}(q)] = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q)\, e^{iqx} dq$$

**1. Séries de Fourier : Transmission et génération de signaux.** *(20 points)*

Un signal numérique de forme “créneau”de période T, c'est-à-dire

$$s(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 < t < 0, \\ 1 & 0 < t < T/2, \end{cases}$$

est envoyé sur une voie de transmission.

---

**a)** *[6 points]* Décomposer le signal en série de Fourier.

*<u>Solution</u> : On utilise les formules données sur la première page,*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} dt = \frac{1}{2}, \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{\pi n}\left[\sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)\right]_0^{T/2} = 0, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right) dt = -\frac{1}{\pi n}\left[\cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)\right]_0^{T/2} = \frac{1}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right]. \end{aligned}$$

*Donc*

$$s(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right] \sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right).$$

---

**b)** *[4 points]* Une voie de transmission a une bande passante limitée : seulement des fréquences entre une fréquence minimale $\omega_{\min}$ et une fréquence maximale $\omega_{\max}$ sont transmises. La voie ayant une bande passante allant de la fréquence $4\pi/T$ à $8\pi/T$, quel est le signal reçu en bout de ligne (en négligeant le bruit, l'amortissement et le déphasage).

*<u>Solution</u> : Les fréquences du signal sont données par $\omega_n = 2\pi n/T$. On cherche $\omega_{\min} \le \omega_n \le \omega_{\max}$, ce qui correspond à*

$$\frac{4\pi}{T} \le \frac{2\pi n}{T} \le \frac{8\pi}{T} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \le n \le 4.$$

*Comme le signal contient que des contributions avec $n$ impair, le seul terme qui reste est $n = 3$. Donc, en bout de ligne, on trouve le signal*

$$s_{\text{transmis}}(t) = \frac{2}{3\pi}\sin\left(6\pi\frac{t}{T}\right).$$

---

**c)** *[10 points]* Supposons que nous voulons créer un générateur d'ondes de période $T$. Combien d'harmoniques (multiples de la fréquence fondamentale) est-ce qu'on doit retenir pour générer les signaux suivants avec une précision supérieure à 1%. L'erreur peut être estimée en calculant l'amplitude du premier terme qu'on néglige dans la série de Fourier.

1. Fonction créneau (voir a))
2. Fonction triangle

$$s(t) = \begin{cases} 1 + 2t/T & -T/2 < x < 0, \\ 1 - 2t/T & 0 < t < T/2. \end{cases}$$

*Solution :*

1. *Fonction créneau : On éxige*

$$\frac{2}{\pi n} < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{200}{\pi} \approx 63.7.$$

   *Donc il faut garder les termes jusqu'à $n = 64$.*

2. *Fonction triangle : D'abord il faut décomposer le signal en série de Fourier. Comme il s'agit d'une fonction paire, $b_n = 0$. On obtient*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} (1 - 2\frac{t}{T})\, dt = \frac{1}{2}, \\ a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} (1 - 2\frac{t}{T}) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \, dt = -\frac{4}{\pi n T}\left\{ \left[ t \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)\right]_0^{T/2} - \int_0^{T/2} \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \, dt \right\} \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[1 - (-1)^n\right]. \end{aligned}$$

   *On éxige*

$$\frac{4}{\pi^2 n^2} < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad n > \sqrt{\frac{400}{\pi^2}} = \frac{20}{\pi} \approx 12.7.$$

   *Donc il faut garder les termes jusqu'à $n = 13$.*

---

## 2. Transformations de Fourier : Oscillateur amorti, forcé. *(30 points + 10 points bonus)*

Un oscillateur amorti, forcé est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \alpha \frac{d}{dt} x(t) + \beta x(t) = f(t). \tag{1}$$

---

**a)** *[3 points]* Quel terme décrit l'amortissement ? Quel terme décrit le fait que l'oscillateur est forcé ? Quelle est la fréquence propre $\omega_0$ de l'oscillateur (sans amortissement et force extérieure) ?

*Solution : Le terme $\alpha \dot{x}$ décrit l'amortissement. Le coefficient $\alpha$ doit être positif. Le fait que l'oscillateur est forcé est décrit par le terme $f(t)$. La fréquence propre de l'oscillateur est donné par $\omega_0 = \sqrt{\beta}$ avec $\beta > 0$.*

---

**b)** *[6 points]* Déterminer la transformée de Fourier de

$$f(t) = H(t) e^{-\nu t + i\Omega t}$$

avec $\nu > 0$. Ici $H(t)$ est la fonction Heaviside, $H(t) = 0$ pour $t < 0$ et $H(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

*Solution : On utilise la formule donnée sur la première page,*

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{-\nu t + i\Omega t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{(-\nu + i\Omega - i\omega)t} dt \\ &= \left[ \frac{1}{-\nu + i\Omega - i\omega} e^{(-\nu + i\Omega - i\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\nu - i\Omega + i\omega}. \end{aligned}$$

---

**c)** *[6 points]* Déduire du résultat trouvé en b) les transformées de Fourier de

$$g(t) = H(t)\cos(\Omega t)e^{-\nu t} \qquad \text{et} \qquad h(t) = H(t)\sin(\Omega t)e^{-\nu t}.$$

*<u>Solution</u> : On utilise*

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

*. Donc*

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\omega) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu - i\Omega + i\omega} + \frac{1}{\nu + i\Omega + i\omega}\right) = \frac{\nu + i\omega}{(\nu + i\omega)^2 + \Omega^2} \\ \tilde{h}(\omega) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\nu - i\Omega + i\omega} - \frac{1}{\nu + i\Omega + i\omega}\right) = \frac{\Omega}{(\nu + i\omega)^2 + \Omega^2}. \end{aligned}$$

---

**d)** *[5 points]* Ecrire l'équation correspondant à (1) pour $\tilde{x}(\omega)$.

*<u>Solution</u> : On utilise* $\mathrm{TF}[f'(x)] = iq\tilde{f}(q)$ *pour trouver*

$$-\omega^2\tilde{x}(\omega) + i\alpha\omega\tilde{x}(\omega) + \beta\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega).$$

---

**e)** *[10 points]* Trouver la réponse de l'oscillateur à $f(t) = \delta(t - t_0)$. Vous obtiendrez

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{e^{-i\omega t_0}}{-\omega^2 + i\alpha\omega + \beta}.$$

Déterminer ensuite $x(t)$.

[Help : Utiliser les résultats obtenus en c). Le facteur exponentiel induit un shift $t \to t - t_0$. (A démontrer.)]

*<u>Solution</u> : L'équation obtenue en d) détermine*

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{-\omega^2 + i\alpha\omega + \beta}.$$

*La TF d'un Dirac est donnée par*

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega(t+t_0)}dt = e^{-i\omega t_0}.$$

*Donc*

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{e^{-i\omega t_0}}{-\omega^2 + i\alpha\omega + \beta}.$$

*Pour trouver $x(t)$ il faut prendre la TF inverse,*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t_0}}{-\omega^2 + i\alpha\omega + \beta}\, e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}}{\left(\frac{\alpha}{2} + i\omega\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}}\, e^{i\omega(t-t_0)}d\omega.$$

*La comparaison avec les résultats obtenus en c) donne*

$$x(t) = \frac{1}{\Omega}H(t - t_0)\sin(\Omega(t - t_0))e^{-\nu(t-t_0)}$$

*avec $\Omega = \sqrt{\beta - \alpha^2/4}$ et $\nu = \alpha/2$. Donc*

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}}H(t - t_0)\sin\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}(t - t_0)\right)e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)}.$$

---

(**) **f)** *[5 points bonus]* Déduire du résultat trouvé en e) une expression intégrale pour la réponse de l'oscillateur à $f(t) = H(t)\cos(\Omega t)$ (sans évaluer l'intégrale).

[Help : L'équation différentielle est linéaire. Si $x_i(t)$ est une solution pour $f(t) = f_i(t)$, $\sum_i a_i x_i(t)$ est une solution pour $f(t) = \sum_i a_i f_i(t)$. Utiliser $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 f(t_0)\delta(t_0 - t)$ et rappeler que l'intégrale peut être considérée comme le processus limite d'une somme.]

(Si vous n'avez pas obtenu de résultat pour e), utiliser $x_{t_0}(t)$.)

*<u>Solution</u> : On utilise*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t_0)\cos(\Omega t_0)\delta(t - t_0)\, dt_0.$$

*Parce que l'équation différentielle est linéaire, on obtient*

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t_0)\cos(\Omega t_0) x_{t_0}(t)\, dt_0 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(t_0)\cos(\Omega t_0)\frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} H(t - t_0)\sin\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}(t - t_0)\right) e^{-\frac{\alpha}{2}(t - t_0)} dt_0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} H(t) e^{-\frac{\alpha}{2}t} \int_0^t \cos(\Omega t_0)\sin\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}(t - t_0)\right) e^{\frac{\alpha}{2}t_0} dt_0.
\end{aligned}$$

---

(**) **g)** *[5 points bonus]* Trouver une expression intégrale pour la réponse de l'oscillateur à $f(t) = H(t)\cos(\Omega t)$ directement en utilisant les transformées de Fourier et les propriétés des convolutions par rapport aux TFs (sans évaluer l'intégrale).

*<u>Solution</u> : D'après le résultat obtenu en c),*

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(\omega) &= \frac{\tilde{f}(\omega)}{-\omega^2 + i\alpha\omega + \beta} \\
&= \tilde{f}(\omega) \cdot \mathrm{TF}\left[\frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} H(t)\sin\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}\, t\right) e^{-\frac{\alpha}{2}t}\right].
\end{aligned}$$

*Avec TF* $\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x - s)\, ds\right] = \tilde{f}(\omega) \cdot \tilde{g}(\omega)$, *on trouve*

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} H(t - s)\sin\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}(t - s)\right) e^{-\frac{\alpha}{2}(t - s)}\, ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} H(s)\cos(\Omega s) H(t - s)\sin\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}(t - s)\right) e^{-\frac{\alpha}{2}(t - s)}\, ds.
\end{aligned}$$

*Finalement, on effectue un changement de variable $s \to t_0$ pour retrouver la même formule qu'en f).*

*RESULTAT FINAL (pour info) : Dans la limite $t \gg \alpha^{-1}$, on obtient*

$$x(t) = \frac{1}{(\beta - \Omega^2)^2 + \alpha^2\Omega^2}\left[(\beta - \Omega^2)\cos(\Omega t) + \alpha\Omega\sin(\Omega t)\right].$$

## 3. Analyse complexe. *(10 points)*

On va considérer les fonctions suivantes,

1. $f_1(z) = z(1-z)$
2. $f_2(z) = \Re[z] + i\Im[z]$
3. $f_3(z) = \Re[z] - i\Im[z]$
4. $f_4(z) = \frac{1}{2-z}$

---

**a)** *[4 points]* Trouver le domaine où les fonctions $f_i(z)$ obéissent aux conditions de Cauchy-Riemann.

*<u>Solution</u> : Les conditions de Cauchy-Riemann sont les suivantes : $\partial_x u = \partial_y v$ et $\partial_y u = -\partial_x v$.*

*1.* $f_1(z) = z(1-z) = (x+iy)(1-x-iy) = x - x^2 + y^2 + i(y - 2xy)$
*Donc*

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x - x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \partial_x u = 1 - 2x, \qquad \partial_y u = 2y, \\ v(x,y) &= y - 2xy \quad \Rightarrow \quad \partial_x v = -2y, \qquad \partial_y v = 1 - 2x. \end{aligned}$$

*Les conditions de Cauchy-Riemann sont obéies pour tous $z \in \mathbb{C}$.*

*2.* $f_2(z) = \Re[z] + i\Im[z] = x + iy$
*Donc*

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x \quad \Rightarrow \quad \partial_x u = 1, \qquad \partial_y u = 0, \\ v(x,y) &= y \quad \Rightarrow \quad \partial_x v = 0, \qquad \partial_y v = 1. \end{aligned}$$

*Les conditions de Cauchy-Riemann sont obéies pour tous $z \in \mathbb{C}$.*

*3.* $f_3(z) = \Re[z] - i\Im[z] = x - iy$
*Donc*

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x \quad \Rightarrow \quad \partial_x u = 1, \qquad \partial_y u = 0, \\ v(x,y) &= -y \quad \Rightarrow \quad \partial_x v = 0, \qquad \partial_y v = -1. \end{aligned}$$

*Les conditions de Cauchy-Riemann sont obéies pour aucun $z \in \mathbb{C}$.*

*4.* $f_4(z) = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2-x-iy} = \frac{2-x+iy}{(2-x)^2+y^2}$
*Donc*

$$\begin{aligned} u(x,y) = \frac{2-x}{(2-x)^2+y^2} \quad &\Rightarrow \quad \partial_x u = \frac{-((2-x)^2+y^2) + 2(2-x)^2}{((2-x)^2+y^2)^2} = \frac{(2-x)^2 - y^2}{((2-x)^2+y^2)^2}, \\ &\qquad\;\; \partial_y u = \frac{-2(2-x)y}{((2-x)^2+y^2)^2}, \\ v(x,y) = \frac{y}{(2-x)^2+y^2} \quad &\Rightarrow \quad \partial_x v = \frac{2(2-x)y}{((2-x)^2+y^2)^2}, \\ &\qquad\;\; \partial_y u = \frac{((2-x)^2+y^2) - 2y^2}{((2-x)^2+y^2)^2} = \frac{(2-x)^2 - y^2}{((2-x)^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

*Les conditions de Cauchy-Riemann sont obéies pour tous $z \in \mathbb{C}\{2\}$.*

---

**b)** *[4 points]* Trouver la dérivée seconde – si elle existe – des fonctions $f_i(z)$.

*<u>Solution</u> : La dérivée seconde existe seulement si les conditions de Cauchy-Riemann sont obéies. Dans ce cas, $f'(z) = \frac{df}{dz}$ et $f''(z) = \frac{d^2 f}{dz^2}$.*

1. $f_1(z) = z(1-z)$
   *On trouve*
$$f_1'(z) = 1 - 2z, \qquad f_1'' = -2.$$
2. $f_2(z) = \Re[z] + i\Im[z]$
   *On trouve*
$$f_2'(z) = 1, \qquad f_2'' = 0.$$
3. $f_3(z) = \Re[z] - i\Im[z]$
   *La fonction $f_3$ n'obéit pas aux conditions de Cauchy-Riemann. Donc la dérivée seconde n'existe pas.*
4. $f_4(z) = \frac{1}{2-z}$
   *On trouve*
$$f_4'(z) = \frac{1}{(2-z)^2}, \qquad f_4'' = \frac{2}{(2-z)^3}.$$

---

**c)** *[2 points]* Trouver le domaine où les fonctions $f_i(z)$ sont analytiques.

*Solution : Une fonction est analytique si elle obéit aux conditions de Cauchy-Riemann et ses dérivées partielles sont continues. Donc, $f_1$ et $f_2$ sont analytiques partout en $\mathbb{C}$. La fonction $f_3$ n'est analytique nul part. La fonction $f_4$ est analytique en $\mathbb{C}\backslash\{2\}$.*

---

**4. Transformations de Fourier : Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist.** *(40 points + 5 points bonus)*

L'échantillonnage consiste a enregistrer un signal $f(t)$ seulement pour un nombre discret de points, $f_n = f(n\tau)$. Le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist affirme que nous sommes capable de reconstituer exactement la fonction $f(t)$ à partir des $f_n$ sous certaines conditions. Nous allons démontrer ce théorème.

Dans un premier temps (questions a) – f)), nous allons démontrer qu'une fonction $\tilde{f}(\omega)$ à support borné (c'est-à-dire, $\tilde{f}(\omega) = 0$ pour $\omega \notin [-\omega_0, \omega_0]$) peut s'écrire sous la forme suivante,

$$\tilde{f}(\omega) = (\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega) \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right),$$

où $\psi_{2\omega_0}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2n\omega_0)$ est un peigne de Dirac (voir ci-dessous) et $\Pi(\omega/2\omega_0)$ est la fonction porte, $\Pi(\omega/2\omega_0) = 1$ pour $-\omega_0 < \omega < \omega_0$ et $\Pi(\omega/2\omega_0) = 0$ sinon.

Dans un deuxième temps (questions g) – i)), nous allons calculer la TF inverse de cette expression pour démontrer que $f(t)$ s'exprime en fonction des $f_n$ seulement. En résultat final, on va trouver

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \operatorname{sinc}(\omega_0(t - n\tau))$$

avec $\tau = \pi/\omega_0$ et $f_n = f(n\pi/\omega_0) = f(n\tau)$.

---

**a)** *[4 points]* Le peigne de Dirac est défini par

$$\psi_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - na).$$

Démontrer que la période de $\psi_a(t)$ est $a$.

*Solution : On trouve*

$$\psi_a(t+a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t+a-na) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-(n-1)a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-na) = \psi(t).$$

*Donc $\psi_a(t)$ est périodique avec la période $a$.*

---

**b)** *[6 points]* Comme $\psi_a(t)$ est de période $a$, on peut décomposer $\psi_a(t)$ en série de Fourier sur l'intervalle $[-a/2, a/2]$. Trouver les coefficients $a_n$ et $b_n$. En déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-na) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi nt/a}.$$

*Solution : Comme $\psi_a(t)$ est une fonction paire, $b_n = 0$. Pour les $a_n$, on obtient*

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-na)\, dt = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-a/2}^{a/2} \delta(t-na)\, dt = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{a}\right) \delta(t-na)\, dt \\
&= \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{a}+n\right) \delta(t)\, dt = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi(n) = \frac{1}{a}, \\
a_n &= \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-na) \cos\left(2\pi n \frac{t}{a}\right)\, dt = \frac{2}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi(n) \cos\left(2\pi n^2\right) = \frac{2}{a}.
\end{aligned}$$

*Donc*

$$\psi_a(t) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{2i\pi nt/a} + e^{-2i\pi nt/a}\right)\right\} = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi nt/a}.$$

---

**c)** *[5 points]* Trouver la TF du peigne de Dirac en utilisant le résultat de b). Démontrer

$$\widetilde{\psi}_a(\omega) = \frac{2\pi}{a} \psi_{2\pi/a}(\omega).$$

*Solution : On trouve*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi nt/a} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - 2\pi n/a)t} dt \\
&= \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{a}\right) = \frac{2\pi}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{a}\right) = \frac{2\pi}{a} \psi_{2\pi/a}(\omega).
\end{aligned}$$

---

**d)** *[8 points]* Rappeler ce que vaut $(f * \delta_a)(t)$, le produit de convolution d'une fonction $f(t)$ quelconque avec la distribution de Dirac, $\delta_a(t) = \delta(t-a)$. Soit maintenant la fonction $f(t)$ à support bornée : $f(t) = 0$ si $t \notin [-b/2, b/2]$. Représenter graphiquement $(f * \delta_a)(t)$ dans les cas où $a < b$, $a = b$ et $a > b$. En utilisant ces résultats, représenter graphiquement $(f * \psi_a)(t)$ dans les trois cas précédents.

*Solution : Le produit de convolution de $f$ et $\delta_a$ est donné par*

$$(f * \delta_a)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta_a(t-s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(t-s-a)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s+t-a)\delta(s)\, ds = f(t-a).$$

*Pour le graphique, on choisit $f(x) = (1-x^2)\Pi(x/2)$. Donc $b = 2$. Voir figures 1 et 2.*

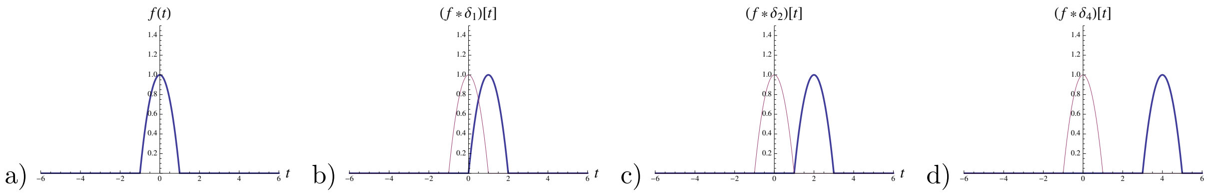


FIGURE 1 – Les quatre figures montrent a) $f(t)$, b) $(f * \delta_1)(t)$ (donc $a < b$), c) $(f * \delta_2)(t)$ (donc $a = b$) et d) $(f * \delta_4)(t)$ (donc $a > b$). Dans les figures b) – d), $f(x)$ est indiqué par une ligne fine pour souligner la différence entre les trois cas.

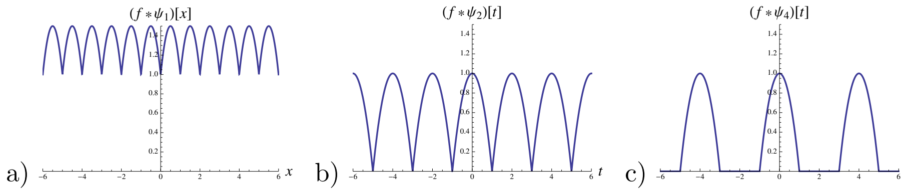


FIGURE 2 – Les trois figures montrent a) $(f * \psi_1)(t)$ (donc $a < b$), b) $(f * \psi_2)(t)$ (donc $a = b$) et d) $(f * \psi_4)(t)$ (donc $a > b$). On voit que dans la figure b), la fonction $f(x)$ est répétée périodiquement avec la période $b$. Dans la figure c), les répétitions se recouvrent. Dans la figure c), il y a des espaces entre les répétitions.

---

**e)** *[3 points]* Soit $g(t)$ une fonction quelconque. Montrer graphiquement les fonctions $g(t)$ et $g(t) \cdot \Pi(t/b)$, où $\Pi$ représente la fonction porte, $\Pi(x) = 1$ pour $-1/2 < x < 1/2$ et $\Pi(x) = 0$ sinon.

<u>Solution</u> : *Pour le graphique, on choisit* $g(t) = \cos(\pi x) - x/4$ *et* $a = 2$. *Voir figure 3.*

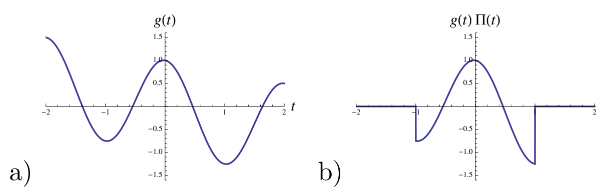


FIGURE 3 – Les deux figures montrent a) $g(t)$ et b) $g(t)\Pi(t/2)$.

---

**f)** *[4 points]* Soit maintenant la fonction à support bornée $\tilde{f}(\omega)$, nulle en dehors de l'intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$. En utilisant les résultats précédents, argumenter pourquoi

$$\tilde{f}(\omega) = (\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega) \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right). \tag{2}$$

Aidez vous d'un graphique.

[Help : Ce n'est pas important que l'argument de la fonction est $\omega$ au lieu de $t$, c'est-à-dire, les considérations sont les mêmes dans l'espace de Fourier que celles qu'on a utilisées dans l'espace réel pour les questions précédentes.]

<u>Solution</u> : *Le produit de convolution* $\tilde{g}(\omega) = (\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega)$ *fait que la fonction* $\tilde{f}(\omega)$ *est répétée périodiquement avec période* $2\omega_0$. *Le produit* $\tilde{g}(\omega) \cdot \Pi(\omega/2\omega_0)$ *fait qu'on retient seulement la copie originale et pas les*

*répétitions. Voir figure 4. Donc*

$$\tilde{f}(\omega) = (\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega) \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right).$$

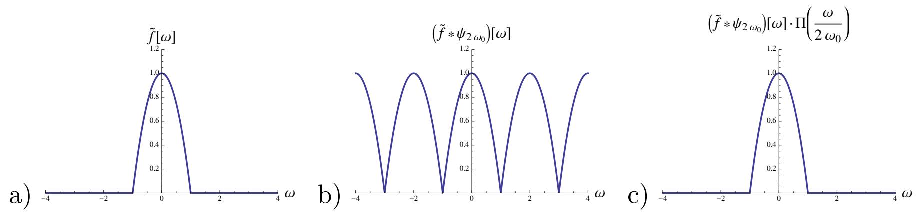


FIGURE 4 – Les trois figures montrent a) $\tilde{f}(\omega)$, b) $(\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega)$ et c) $(\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega) \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$. On voit que les fonctions dans les figures a) et c) sont les mêmes.

---

**g)** *[6 points]* Trouver la TF inverse de la fonction porte. Démontrer

$$\mathrm{TF}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)\right] = \frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\omega_0 t).$$

Ici $\mathrm{sinc}(x) = \sin x / x$.

*Solution : On trouve*

$$\begin{aligned}\mathrm{TF}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{it}e^{i\omega t}\right]_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{1}{2\pi i t}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right) \\ &= \frac{1}{\pi t}\sin(\omega_0 t) = \frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\omega_0 t).\end{aligned}$$

---

**h)** *[4 points]* Rappeler la TF inverse de $\tilde{a}(\omega) \cdot \tilde{b}(\omega)$. Rappeler la TF inverse de $\left(\tilde{c} * \tilde{d}\right)(\omega)$.

*Solution : On trouve*

$$\begin{aligned}\mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{a}(\omega) \cdot \tilde{b}(\omega)\right] &= (a * b)(t), \\ \mathrm{TF}^{-1}\left[\left(\tilde{c} * \tilde{d}\right)(\omega)\right] &= 2\pi\, c(t) \cdot d(t).\end{aligned}$$

---

(**) **i)** *[5 points bonus]* Démontrer

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\frac{\pi}{\omega_0})\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t - n\frac{\pi}{\omega_0})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t - n\tau))$$

à partir de l'expression (2) pour $\tilde{f}(\omega)$ en f).

Rappel : Selon b), $\mathrm{TF}^{-1}[\psi_a(\omega)] = (1/a)\psi_{2\pi/a}(t)$.

*Solution : Selon f), la fonction $\tilde{f}(\omega)$ peut s'écrire sous la forme $\tilde{a}(\omega) \cdot \tilde{b}(\omega)$ avec $\tilde{a}(\omega) = (\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega)$ et $\tilde{b}(\omega) = \Pi(\omega/2\omega_0)$. Donc, selon h),*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(s) b(t - s)\, ds.$$

*On utilise alors que, selon h),*

$$a(s) = \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{a}(\omega)] = \mathrm{TF}^{-1}\left[(\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega)\right] = 2\pi f(s) \cdot \mathrm{TF}^{-1}[\psi_{2\omega_0}(\omega)].$$

*Avec b), on obtient*

$$a(s) = \frac{\pi}{\omega_0} f(s) \cdot \psi_{\pi/\omega_0}(s).$$

*Selon g),* $b(t-s) = (\omega_0/\pi)\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t-s))$*. Donc,*

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \psi_{\pi/\omega_0}(s) \cdot \frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t-s))\,ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(s - n\frac{\pi}{\omega_0})\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t-s))\,ds \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\pi}{\omega_0}\right)\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t - n\frac{\pi}{\omega_0})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t - n\tau)). \end{aligned}$$

---

FIN : Cette expression nous donne une représentation exacte de la fonction $f(t)$ à partir des $f_n = f(n\tau)$ avec $\tau = \pi/\omega_0$. Nous avons utilisé les conditions suivantes

— $\tilde{f}(\omega)$ est à support borné,

$$\tilde{f}(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \omega \notin [-\omega_0, \omega_0].$$

C'est-à-dire, la fonction originale $f(t)$ ne contient pas de fréquences plus élevées qu'une certaine fréquence $\omega_0$

— Le signal est échantillonné au moins à des intervalles $\tau = \pi/\omega_0$.

---