Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Contrôle continu – 3 novembre 2011

Modalités : Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :
- Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles (en particulier, les questions marquées par $^{(**)}$) à la fin.
- Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.
- La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seulement une argumentation correcte rapporte des points.

Formules utiles :

Séries de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x) \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\,dx \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\,dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2i\pi n x/L} \qquad c_n = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\, e^{2i\pi n x/L} dx$$

Transformées de Fourier :

$$\mathrm{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iqx} dx \qquad \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{f}(q)] = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q)\, e^{iqx} dq$$

1. Séries de Fourier : Transmission et génération de signaux. *(∼20%)*

Un signal numérique de forme “créneau”de période T, c'est-à-dire

$$s(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 < t < 0, \\ 1 & 0 < t < T/2, \end{cases}$$

est envoyé sur une voie de transmission.

a) Décomposer le signal en série de Fourier.

b) Une voie de transmission a une bande passante limitée : seulement des fréquences entre une fréquence minimale ω_{min} et une fréquence maximale ω_{max} sont transmises. La voie ayant une bande passante allant de la fréquence $4\pi/T$ à $8\pi/T$, quel est le signal reçu en bout de ligne (en négligeant le bruit, l'amortissement et le déphasage).

c) Supposons que nous voulons créer un générateur d'ondes de période T. Combien d'harmoniques (multiples de la fréquence fondamentale) est-ce qu'on doit retenir pour générer les signaux suivants avec une précision supérieure à 1%. L'erreur peut être estimée en calculant la valeur du premier terme qu'on néglige dans la série de Fourier.

1. Fonction créneau (voir a))
2. Fonction triangle

$$s(t) = \begin{cases} 1 + 2t/T & -T/2 < x < 0, \\ 1 - 2t/T & 0 < t < T/2. \end{cases}$$

---

2. Transformations de Fourier : Oscillateur amorti, forcé. *(∼30%)*

Un oscillateur amorti, forcé est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \alpha\frac{d}{dt}x(t) + \beta x(t) = f(t). \tag{1}$$

a) Quel terme décrit l'amortissement ? Quel terme décrit le fait que l'oscillateur est forcé ? Quelle est la fréquence propre ω_0 de l'oscillateur (sans amortissement et force extérieure) ?

b) Déterminer la transformée de Fourier de

$$f(t) = H(t)e^{-\nu t + i\Omega t}$$

avec $\nu > 0$. Ici $H(t)$ est la fonction Heaviside, $H(t) = 0$ pour $t < 0$ et $H(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

c) Déduire du résultat trouvé en b) les transformées de Fourier de

$$g(t) = H(t)\cos(\Omega t)e^{-\nu t} \qquad \text{et} \qquad h(t) = H(t)\sin(\Omega t)e^{-\nu t}.$$

d) Ecrire l'équation correspondant à (1) pour $\tilde{x}(\omega)$.

e) Trouver la réponse de l'oscillateur à $f(t) = \delta(t - t_0)$. Vous obtiendrez

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{e^{-i\omega t_0}}{-\omega^2 + i\alpha\omega + \beta}.$$

Déterminer ensuite $x(t)$.

[Help : Utiliser les résultats obtenus en c). Le facteur exponentiel induit un shift $t \to t - t_0$. (A démontrer.)]

(**) **f)** Déduire du résultat trouvé en e) une expression intégrale pour la réponse de l'oscillateur à $f(t) = H(t)\cos(\Omega t)$ (sans évaluer l'intégrale).

[Help : L'équation différentielle est linéaire. Si $x_i(t)$ est une solution pour $f(t) = f_i(t)$, $\sum_i a_i x_i(t)$ est une solution pour $f(t) = \sum_i a_i f_i(t)$. Utiliser $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 f(t_0)\delta(t - t_0)$ et rappeler que l'intégrale peut être considérée comme le processus limite d'une somme.]

(Si vous n'avez pas obtenu de résultat pour e), utiliser $x_{t_0}(t)$.)

(**) **g)** Trouver une expression intégrale pour la réponse de l'oscillateur à $f(t) = H(t)\cos(\Omega t)$ directement en utilisant les transformées de Fourier et les propriétés des convolutions par rapport aux TFs (sans évaluer l'intégrale).

---

3. Analyse complexe. *(∼10%)*

On va considérer les fonctions suivantes,

1. $f_1(z) = z(1 - z)$
2. $f_2(z) = \Re[z] + i\Im[z]$

3. $f_3(z) = \Re[z] - i\Im[z]$
4. $f_4(z) = \frac{1}{2-z}$

a) Trouver le domaine où les fonctions $f_i(z)$ obéissent aux conditions de Cauchy-Riemann.

b) Trouver la dérivée seconde – si elle existe – des fonctions $f_i(z)$.

c) Trouver le domaine où les fonctions $f_i(z)$ sont analytiques.

---

4. Transformations de Fourier : Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist. *(~40%)*

L'échantillonnage consiste a enregistrer un signal $f(t)$ seulement pour un nombre discret de points, $f_n = f(n\tau)$. Le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist affirme que nous sommes capable de reconstituer exactement la fonction $f(t)$ à partir des f_n sous certaines conditions. Nous allons démontrer ce théorème.

Dans un premier temps (questions a) – f)), nous allons démontrer qu'une fonction $\tilde{f}(\omega)$ à support borné (c'est-à-dire, $\tilde{f}(\omega) = 0$ pour $\omega \notin [-\omega_0, \omega_0]$) peut s'écrire sous la forme suivante,

$$\tilde{f}(\omega) = (\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega) \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right),$$

où $\psi_{2\omega_0}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2n\omega_0)$ est un peigne de Dirac (voir ci-dessous) et $\Pi(\omega/2\omega_0)$ est la fonction porte, $\Pi(\omega/2\omega_0) = 1$ pour $-\omega_0 < \omega < \omega_0$ et $\Pi(\omega/2\omega_0) = 0$ sinon.

Dans un deuxième temps (questions g) – i)), nous allons calculer la TF inverse de cette expression pour démontrer que $f(t)$ s'exprime en fonction des f_n seulement. En résultat final, on va trouver

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \operatorname{sinc}(\omega_0(t - n\tau))$$

avec $\tau = \pi/\omega_0$ et $f_n = f(n\pi/\omega_0) = f(n\tau)$.

a) Le peigne de Dirac est défini par

$$\psi_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - na).$$

Démontrer que la période de $\psi_a(t)$ est a.

b) Comme $\psi_a(t)$ est de période a, on peut décomposer $\psi_a(t)$ en série de Fourier sur l'intervalle $[-a/2, a/2]$. Trouver les coefficients a_n et b_n. En déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - na) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi nt/a}.$$

c) Trouver la TF du peigne de Dirac en utilisant le résultat de b). Démontrer

$$\widetilde{\psi}_a(\omega) = \frac{2\pi}{a} \psi_{2\pi/a}(\omega).$$

d) Rappeler ce que vaut $(f * \delta_a)(t)$, le produit de convolution d'une fonction $f(t)$ quelconque avec la distribution de Dirac, $\delta_a(t) = \delta(t - a)$. Soit maintenant la fonction $f(t)$ à support bornée : $f(t) = 0$ si $t \notin [-b/2, b/2]$. Représenter graphiquement $(f * \delta_a)(t)$ dans les cas où $a < b$, $a = b$ et $a > b$. En utilisant ces résultats, représenter graphiquement $(f * \psi_a)(t)$ dans les trois cas précédents.

e) Soit $g(t)$ une fonction quelconque. Montrer graphiquement les fonctions $g(t)$ et $g(t) \cdot \Pi(t/a)$, où Π représente la fonction porte, $\Pi(x) = 1$ pour $-1/2 < x < 1/2$ et $\Pi(x) = 0$ sinon.

f) Soit maintenant la fonction à support bornée $\tilde{f}(\omega)$, nulle en dehors de l'intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$. En utilisant les résultats précédents, argumenter pourquoi

$$\tilde{f}(\omega) = (\tilde{f} * \psi_{2\omega_0})(\omega) \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right). \tag{2}$$

Aidez vous d'un graphique.

[Help : Ce n'est pas important que l'argument de la fonction est ω au lieu de t, c'est-à-dire, les considérations sont les mêmes dans l'espace de Fourier que celles qu'on a utilisées dans l'espace réel pour les questions précédentes.]

g) Trouver la TF inverse de la fonction porte. Démontrer

$$\mathrm{TF}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)\right] = \frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\omega_0 t).$$

Ici $\mathrm{sinc}(x) = \sin x / x$.

h) Rappeler la TF inverse de $\tilde{a}(\omega) \cdot \tilde{b}(\omega)$. Rappeler la TF inverse de $\left(\tilde{c} * \tilde{d}\right)(\omega)$.

$^{(**)}$ **i)** Démontrer

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\frac{\pi}{\omega_0})\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t - n\frac{\pi}{\omega_0})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\,\mathrm{sinc}(\omega_0(t - n\tau))$$

à partir de l'expression (2) pour $\tilde{f}(\omega)$ en f).

Rappel : Selon b), $\mathrm{TF}^{-1}[\psi_a(\omega)] = (1/a)\psi_{2\pi/a}(t)$.

FIN : Cette expression nous donne une représentation exacte de la fonction $f(t)$ à partir des $f_n = f(n\tau)$ avec $\tau = \pi/\omega_0$. Nous avons utilisé les conditions suivantes

— $\tilde{f}(\omega)$ est à support borné,

$$\tilde{f}(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \omega \notin [-\omega_0, \omega_0].$$

C'est-à-dire, la fonction originale $f(t)$ ne contient pas de fréquences plus élevées qu'une certaine fréquence ω_0

— Le signal est échantillonné au moins à des intervalles $\tau = \pi/\omega_0$.